

Министерство образования Кировской области

**КОМПЛЕКТ
контрольно-измерительных материалов
для проверочных работ
по учебной дисциплине**

ОДП.15. Математика

профессиональной образовательной программы (ПОП)
для образовательных организаций СПО

ЧАСТЬ 3

Киров 2018

ОДОБРЕНО

Составители:

Бахтина Е.В., преподаватель математики КОГПОБУ «ВятКТУиС»

Киселёва И.И., преподаватель математики КОГОАУ СПО «Колледж промышленности и автомобильного сервиса»

Шулятьева Н.Н., преподаватель математики КОГОАУ СПО «Колледж промышленности и автомобильного сервиса»

Информационные редакторы:

Корякина М.Л., преподаватель информационных технологий КОГПОБУ «ВятКТУиС»

Внешняя экспертиза

Комплект контрольно-измерительных материалов составлен для текущего контроля по дисциплине «Математика», реализуемой в рамках федерального государственного образовательного стандарта содержит карточки-задания по всем разделам курса алгебры и математического анализа. Может быть использован преподавателями образовательных организаций для студентов 1 курса.

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка.....	4
1 Результаты освоения дисциплины, подлежащие проверке.....	6
2 Рациональные уравнения.....	7
2.1 Справочный материал.....	7
2.2 Темы проверочных работ.....	8
2.3 Задания из ЕГЭ.....	10
3 Тригонометрические уравнения.....	11
3.1 Справочный материал.....	11
3.2 Темы проверочных работ.....	12
3.3 Задания из ЕГЭ.....	18
4 Иррациональные уравнения.....	19
4.1 Справочный материал.....	19
4.2 Темы проверочных работ.....	20
4.3 Задания из ЕГЭ.....	23
5 Показательные уравнения.....	24
5.1 Справочный материал.....	24
5.2. Темы проверочных работ.....	25
5.3. Задания из ЕГЭ.....	30
6 Логарифмические уравнения.....	31
6.1 Справочный материал.....	31
6.2. Темы проверочных работ.....	32
6.3. Задания из ЕГЭ.....	36
Литература.....	37

Пояснительная записка

Комплект контрольно-измерительных материалов (далее - КИМ) по учебной дисциплине «Математика» разработан на основе рабочей программы для всех специальностей среднего профессионального образования, который реализуется в рамках федерального государственного образовательного стандарта (далее - ФГОС) среднего общего образования на базовом уровне в пределах основной образовательной программы среднего профессионального образования.

Комплект КИМ предназначен для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины. Комплект контрольно-измерительных материалов включает контрольные материалы для текущего контроля. Он состоит из нескольких частей по всем разделам программы дисциплины «Математика». Каждая часть содержит несколько проверочных работ по определенной теме.

Часть 1 – «Производная и ее применение»

Часть 2 – «Преобразование выражений»

Часть 3 – «Решение уравнений»

Часть 4 – «Решение неравенств»

В комплекте каждая проверочная работа содержит четыре варианта. В начале работы указано название, цель и время проведения проверочной работы; в заключение каждой работы есть критерии оценки выполненных заданий. Эти материалы позволяют дифференцировать контроль путем разумного сочетания фронтальной, групповой и индивидуальной формы работы обучающимися. Комплект КИМов предоставляет преподавателю возможность дифференцировать текущий контроль обучающихся на всех этапах и уровнях усвоения знаний:

- первичное ознакомление с новым материалом;
- ликвидация пробелов в знаниях;
- выработка умений и навыков применять полученные знания в сходных и новых ситуациях.

Данные проверочные работы могут быть использованы в качестве индивидуальных карточек-заданий, предназначенных для контроля ранее пройденного материала, а так же для проверки уровня усвоенного материала,

студентами, которые не изучали материал из-за пропущенных занятий. Такие кратковременные индивидуальные работы позволяют подключить к работе отдельных студентов, не усвоивших этот материал своевременно.

Часть 3 «Решение уравнений» содержит несколько видов проверочных работ по всей теме, в которых отрабатывается материал – начиная с повторения материала за школьный курс по теме «Решение линейных, квадратных, биквадратных уравнений». 3 часть комплекта контрольно-измерительных материалов разработана в соответствии с тематическим планом дисциплины «Математика» по этому разделу на основе требований к умениям: используя основные приемы и методы решать простейшие тригонометрические уравнения; уравнения, сводящиеся к квадратным и однородные тригонометрические уравнения; иррациональные уравнения, показательные и логарифмические уравнения; освоить общие приемы решения уравнений (разложение на множители, подстановка, замена переменной, графический метод), а также общие приемы решения систем; овладеть техникой решения рациональных, иррациональных, логарифмических, показательных, тригонометрических уравнений.

Комплект КИМов помогает преподавателю осуществлять внедрение ФГОС нового поколения в учебный процесс.

1. Результаты освоения дисциплины, подлежащие проверке

Требования к умениям

В результате изучения учебной дисциплины обучающийся должен уметь:

У 1 решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;

У 2 использовать графический метод решения уравнений и неравенств;

У 3 изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными;

У 4 составлять и решать уравнения и неравенства, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.

У 5 использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

для построения и исследования простейших математических моделей.

2 Рациональные уравнения

2.1 Справочный материал

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

1. Линейное уравнение – уравнение, в которых переменная находится в первой степени.

2. Квадратное уравнение - уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$; x – искомая переменная.

3. Алгоритм решения квадратных уравнений:

- $D = b^2 - 4ac$.
- Если $D = 0$, то уравнение имеет два совпадающих корня (единственное решение): $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

- Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$\bullet \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

- Если $D < 0$, то уравнение действительных корней не имеет.

2.2 Темы проверочных работ

Проверочная работа №1.

Цель: повторить способы решения линейных, квадратных и дробно-рациональных уравнений.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 15 минут.

Вариант 1

1. $3x - 4 = 7$
2. $3(x + 5) - 2 = 5 - x$
3. $\frac{x}{4} + 5 = 3x - 7$
4. $x^2 + 5x - 6 = 0$
5. $4x^2 - 1 = 0$

Вариант 3

1. $5x + 3 = 9$
2. $4(7 - x) + 2 = 8 + x$
3. $2x - 3 = \frac{x}{6} + 4$
4. $-x^2 + 4x - 3 = 0$
5. $x^2 - 1 = 0$

Вариант 2

1. $7 - 3x = 2$
2. $3 - (2x + 6) = 7x + 4$
3. $5 - \frac{x}{7} = 4 - 3x$
4. $3x^2 - 5x + 2 = 0$
5. $x^2 - 5x = 0$

Вариант 4

1. $7 + 3x = 0$
2. $5 + 2(x - 8) = 3 - x$
3. $\frac{x}{4} + 5x = \frac{1}{2} - 3$
4. $x^2 + 6x - 7 = 0$
5. $3x^2 + 4x = 0$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все пять заданий проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно четыре задания проверочной работы.	4
Выполнено правильно три задания проверочной работы.	3
Выполнены правильно одно или два задания проверочной работы.	2

Проверочная работа № 2.

Цель: повторить способы решения линейных, квадратных и дробно-рациональных уравнений.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 30 минут.

1 вариант

1) $15(x+3) - 1 = 11(2x+3) - 10$

2) $4x^2 - x - 14 = 0$

3) $\frac{x}{2x-3} = \frac{4}{5}$

4) $2x^3 - 5x^2 - 3x = 0$

5) $\frac{2x+5}{x^2+x} - \frac{2}{x} - \frac{3x}{x+1} = 0$

2 вариант

1) $9(x+1) - 2(2-3x) = -10$

2) $3x^2 - 2x - 16 = 0$

3) $\frac{x}{2x+3} = \frac{1}{3}$

4) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

5) $\frac{2x}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = 0$

3 вариант

1) $4(2x-5) - 3(8-3x) = 41$

2) $4x^2 - 3x - 22 = 0$

3) $\frac{x}{2x+6} = \frac{2}{5}$

4) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

5) $\frac{2}{x} + \frac{10}{x^2-2x} = \frac{1+2x}{x-2}$

4 вариант

1) $2(19+x) - 5(16-x) = 7$

2) $3x^2 + 7x - 6 = 0$

3) $\frac{x-2}{2x-3} = \frac{1}{2}$

4) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

5) $\frac{1}{x-3} + \frac{18}{x^2-9} = \frac{x}{x+3}$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все пять заданий проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно четыре задания проверочной работы, либо получены во всех заданиях верные ответы, но допущена одна ошибка при нахождении ОДЗ дробно-рационального уравнения	4
Выполнено правильно три задания проверочной работы, либо получены во всех заданиях верные ответы, но допущены ошибки при нахождении ОДЗ дробно-рациональных уравнений	3
Выполнены правильно одно или два задания проверочной работы.	2

3 Тригонометрические уравнения

3.1 Справочный материал

Определение. Простейшим тригонометрическим называется уравнение, в котором переменная находится под знаком тригонометрической функции, т.е. уравнение вида $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$

1. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}, a \leq 1$	$\sin x = 0; x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, a \leq 1$	$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\cos x = 1; x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ a - любое число	$\operatorname{tg} x = 0; x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg} x = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg} x = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ a - любое число	$\operatorname{ctg} x = 0; x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg} x = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg} x = -1; x = \frac{3\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$

2. Тригонометрические уравнения.

Уравнение	Способ решения	Формулы
1	2	3
1. Уравнение содержит только синусы или косинусы (синусы и	Уравнение сводится к квадратному	$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

<p>косинусы) вида</p> $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) + c = 0$ $a \cos^2 f(x) + b \cos f(x) + c = 0$ <p>и т.д.</p> <p style="text-align: center;">1</p>	<p>(биквадратному) относительно синуса (косинуса)</p> <p style="text-align: center;">2</p>	$ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $\sin x \in [-1; 1]$ $\cos x \in [-1; 1]$ <p style="text-align: center;">3</p>
<p>2. Однородное уравнение I степени вида</p> $a \sin x + b \cos x = 0$ <p>($a \neq 0, b \neq 0$)</p>	<p>Деление обеих частей на $\cos x \neq 0$. Получаем:</p> $a \operatorname{tg} x + b = 0$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$
<p>3. Однородное уравнение II степени вида</p> $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) \cdot \cos f(x) + k \cos^2 f(x) = 0$	<p>Деление обеих частей на $\cos^2 x \neq 0$. Получаем:</p> $a \operatorname{tg}^2 f(x) + b \operatorname{tg} x + k = 0$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
<p>4. Уравнение вида</p> $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$ $a \operatorname{tg} x + b \frac{1}{\operatorname{tg} x} + c = 0 \quad \cdot \operatorname{tg} x$ $a \operatorname{tg}^2 x + b + c \cdot \operatorname{tg} x = 0$	<p>Уравнение сводится к квадратному относительно тангенса заменой $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$</p>	$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$ $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

3.2 Темы проверочных работ

Проверочная работа №1.

Цель: отработать формулы решения простейших тригонометрических уравнений.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 20 минут.

Вариант 1

1. $\sin x = \frac{1}{2}$

2. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\operatorname{tg} x = 1$

4. $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

5. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Вариант 2

1. $\sin x = -\frac{1}{2}$

2. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

4. $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

5. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Вариант 3

1. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\cos x = -1$

3. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4. $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

5. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Вариант 4

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\cos x = \frac{1}{2}$

3. $\operatorname{tg} x = -1$

4. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5. $\cos x = -1$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все пять заданий проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно четыре задания проверочной работы.	4
Выполнено правильно три задания проверочной работы.	3
Выполнены правильно одно или два задания проверочной работы.	2

Проверочная работа № 2.

Цель: отработать приемы решения простейших тригонометрических уравнений, со сложным аргументом.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 30 минут.

Вариант 1

2. $\sin \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

6. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) = 1$

Вариант 2

1. $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$

5. $\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Вариант 3

1. $\sin \frac{x}{5} = 1$

2. $\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

5. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Вариант 4

1. $\sin 5x = -\frac{1}{2}$

2. $\cos \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

4. $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$

5. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все пять заданий проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5

Выполнено правильно четыре задания проверочной работы.	4
Выполнено правильно три задания проверочной работы.	3
Выполнены правильно одно или два задания проверочной работы.	2

Проверочная работа № 3.

Цель: отработать решения тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 20 минут.

Вариант 1

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$2\cos^2 x + \sin x = 2,5$$

$$\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

Вариант 2

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - 2\cos x = \frac{5}{2}$$

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x$$

Вариант 3

$$4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$$

$$2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$$

$$\sin^2 x + 2\sin 2x + 3\cos^2 x = 0$$

Вариант 4

$$4\cos^2 x - 1 = 0$$

$$4\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0$$

$$1 + 2\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все три задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно 1 и 3 задания проверочной работы, получены верные ответы.	4
Выполнено правильно 1 и 2 задания проверочной работы, получены верные ответы.	3
Выполнены правильно одно задание проверочной работы.	2

Проверочная работа № 4.

Цель: отработать способы решения тригонометрических уравнений, с использованием формул тригонометрии.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 30 минут.

Вариант 1

$$\sin x = -\sqrt{3} \cos x$$

$$1 - \cos 2x = \sin 2x$$

$$\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \frac{1}{2}$$

Вариант 2

$$\sin 3x = -\cos 3x$$

$$1 + \cos 2x = \sin 2x$$

$$\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x = -1$$

Вариант 3

$$\sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$1 - 2 \sin 2x = 6 \cos^2 x$$

$$\sin 5x \cos x - \cos 5x \sin x = 0,5$$

Вариант 4

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 0$$

$$(\cos x - \sin x)^2 = \cos 2x$$

$$\cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x = -0,5$$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все три задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно 2 и 3 задания проверочной работы, получены верные ответы.	4
Выполнено правильно 1 и 3 задания проверочной работы, получены верные ответы.	3
Выполнены правильно одно задание проверочной работы.	2

3.3 Задания из ЕГЭ

1. $2\sin^2 x = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

2. $\sqrt{2} \sin^2 x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

3. $2\sin^3 x - 2\sin x + \cos^2 x = 0$

4. $2\sin^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

5. $2\sin^2 x = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

6. $2\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$

7. $2\sin^2 x = \operatorname{tg} x$

8. $4\sin^2 x = \sqrt{3} \operatorname{tg} x$

9. $2\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$

10. $4\sin^2 x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x = 0$

11. $4\sin^2 x + \operatorname{tg} x = 0$

12. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \sin x$

4 Иррациональные уравнения

4.1 Справочный материал

Определение. Уравнение, содержащее переменную под знаком радикала (корня), называется иррациональным.

Алгоритм решения иррациональных уравнений:

- $\sqrt{kx+b} = d$, где $d > 0$ - простейшее иррациональное уравнение, сводятся к уравнению $(\sqrt{kx+b})^2 = d^2 \Rightarrow kx+b = d^2$

- $\sqrt{kx+b} = \sqrt{mx+n}$ где $\begin{cases} kx+b \geq 0 \\ mx+n \geq 0 \end{cases}$ - простейшее иррациональное уравнение, сводятся к уравнению $(\sqrt{kx+b})^2 = (\sqrt{mx+n})^2 \Rightarrow kx+b = mx+n$

- $\sqrt{f(x)} = g(x)$ где $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ - иррациональное уравнение, сводится к уравнению вида $(\sqrt{f(x)})^2 = (g(x))^2 \Rightarrow f(x) = (g(x))^2$

- при решении иррациональных уравнений обязательно учитывать область допустимых значений

Действия с дробными степенями и корнями

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

$$(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{m \cdot p}}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[2n]{[f(x)]^{2n}} = |f(x)|$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[2n+1]{[f(x)]^{2n+1}} = f(x)$$

4.2 Темы проверочных работ

Проверочная работа № 1.

Цель: отработать способы решения простейших иррациональных уравнений.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 20 минут.

1 вариант

1) $\sqrt{x+1} = 4$

2) $\sqrt{16+x} = 2$

3) $\sqrt{x^2 - x - 9} = x$

2 вариант

1) $\sqrt{2x-3} = 1$

2) $\sqrt{2x+7} = 3$

3) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = x$

3 вариант

1) $\sqrt{1-2x} = 5$

2) $3 = \sqrt{2x+22}$

3) $\sqrt{x^2 - 3x - 1} = x$

4 вариант

1) $\sqrt{4x+7} = 3$

2) $7 = \sqrt{x+5}$

3) $\sqrt{x^2 - 7x - 3} = x$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все три задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно два задания проверочной работы, либо получены верные ответы во всех заданиях, но в одном из них допущена ошибка при выполнении проверки или нахождении ОДЗ.	4
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в двух заданиях получены верные ответы, но допущена ошибка при выполнении проверки или нахождении ОДЗ для одного из этих заданий.	3
В одном задании получен верный ответ, но допущена ошибка при выполнении проверки или нахождении ОДЗ для этого задания.	2

Проверочная работа № 2.

Цель: отработать способы решения иррациональных уравнений.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 30 минут.

1 вариант

1) $\sqrt{16+x} = x-4$

2) $\sqrt{5x^2-x-9}+1=2x$

3) $\sqrt{3(x-1)}+1=x$

2 вариант

1) $\sqrt{2x+7} = x-4$

2) $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$

3) $x+\sqrt{-5x-1}=1$

3 вариант

1) $x-1=\sqrt{2x+22}$

2) $\sqrt{x^2-3x-1}+7=2x$

3) $1+\sqrt{3x^2-2}=2x$

4 вариант

1) $x-1=\sqrt{x+5}$

2) $\sqrt{2x^2-7x-3}+x=3$

3) $\sqrt{3x+7}-3=x$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все три задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно два задания проверочной работы, либо получены верные ответы во всех заданиях, но в одном из них допущена ошибка при выполнении проверки или нахождении ОДЗ.	4
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в двух заданиях получены верные ответы, но допущена ошибка при выполнении проверки или нахождении ОДЗ для одного из этих заданий.	3
В одном задании получен верный ответ, но допущена ошибка при выполнении проверки или нахождении ОДЗ для этого задания.	2

Проверочная работа № 3

Цель: отработать способы решения иррациональных уравнений.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 30 минут.

Вариант 1

1. $\sqrt{3x^2 - 5x - 12} = 10$

2. $\sqrt{x - 4\sqrt{x} + 4} = 3$

3. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x - 3} = 1$

Вариант 2

1. $\sqrt{6 - x - x^2} = x + 1$

2. $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 5}} = 1$

3. $2 + \sqrt{10 - x} = \sqrt{22 - x}$

Вариант 3

1. $\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - x - 3}$

2. $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x + 3}} = 3$

3. $\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 2} = 9$

Вариант 4

1. $\sqrt{17 + 2x - 3x^2} = x + 1$

2. $\sqrt{18 - \sqrt[3]{x + 10}} = 4$

3. $\sqrt{x - 3} = 1 + \sqrt{x - 4}$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все три задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно два задания проверочной работы, либо получены верные ответы во всех заданиях, но в одном из них допущена ошибка при выполнении проверки или нахождении ОДЗ.	4
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в двух заданиях получены верные ответы, но допущена ошибка при выполнении проверки или нахождении ОДЗ для одного из этих заданий.	3
В одном задании получен верный ответ, но допущена ошибка при выполнении проверки или нахождении ОДЗ для этого задания.	2

4.3 Задания из ЕГЭ

1. $\sqrt{\frac{10}{4x-26}} = \frac{1}{7}$

2. $\sqrt{\frac{4x+32}{7}} = 6$

3. $\sqrt{33+2x} = 5$

4. $\sqrt[3]{x-5} = 2$

5. $\sqrt{\frac{4}{x^2-12}} = 1$

5 Показательные уравнения

5.1 Справочный материал

Определение. Показательными называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Теорема: Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Алгоритм решения простейшего показательного уравнения:

- Привести обе части уравнения к виду – равенство двух частей с одинаковым основанием - $a^{f(x)} = a^{g(x)}$
- Если степени равны, основания равны, то и показатели равны - $f(x) = g(x)$
- Решаем полученное уравнение известным способом
- Выписать ответ

Действия со степенями

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^n}{b^m} = a^{n-m} \quad (a > 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

5.2 Темы проверочных работ

Проверочная работа № 1.

Цель: отработать способы решения простейших показательных уравнений, с использованием таблицы степеней.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 20 минут.

Вариант 1

1. $6^{3-x} = 216$
2. $4^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$
3. $5^{x+3} = \sqrt[4]{125}$

Вариант 2

1. $(0,5)^{3x+4} = 32$
2. $3\bar{5}^{2-1} = 243.$
3. $100^{x^2-1} = 10^{1-5x}$

Вариант 3

1. $2^{3x-1} = (0,25)^{2-x}$
2. $6^{5x-3} = 216$
3. $2^{3x} = \sqrt[3]{512}$

Вариант 4

1. $16^{2x-1} = 8^{x-2}$
2. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2+7x} = \left(\frac{16}{9}\right)^{x-5}$
3. $0,1^{x-8} = \sqrt[3]{100}$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все три задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно два задания проверочной работы, либо в одном задании допущена арифметическая ошибка при решении степенного уравнения.	4
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в двух заданиях допущены арифметические ошибки при решении степенного уравнения.	3
В одном задании получен верный ответ, но допущены арифметические ошибки при решении двух степенных уравнений.	2

Проверочная работа № 2.

Цель: отработать способы решения простейших показательных уравнений, используя свойства степени.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 20 минут.

Вариант 1

$$3^{x-\frac{1}{2}} \cdot 3^{x+1} = 1$$

$$225^{2x^2-24} = 15.$$

Вариант 2

$$2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} \cdot 3^{5x} = \frac{1}{3}$$

Вариант 3

$$3^{3x-24} \cdot 81^{9-x} = 243$$

$$\frac{1}{7^{5-13x}} = 7^{8x+7}$$

Вариант 4

$$(0,1)^{-(x^2-5x+8)} = 100.$$

$$\frac{1}{3^{20-x}} = 27$$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все два задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в одном задании допущена арифметическая ошибка при решении степенного уравнения.	4
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в двух заданиях допущены арифметические ошибки при решении степенного уравнения.	3
В одном задании получен верный ответ, но допущены арифметические ошибки при решении двух степенных уравнений.	2

Проверочная работа № 3.

Цель: отработать способы решения показательных уравнений, используя вынесение общего множителя за скобки.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 20 минут.

Вариант 1

$$5^x - 5^{x-3} = 0,992$$

$$2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$$

$$3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$$

Вариант 2

$$7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$$

$$10^x + 10^{x-1} = 0,11$$

$$3^{x+2} + 3^{x+3} = 108$$

Вариант 3

$$3^x - 3^{x-2} = 8.$$

$$7^{x+2} - 7^{x+1} = 6.$$

$$3^{3x+1} - 3^{3x-1} = 24$$

Вариант 4

$$3^{3x+1} - 5 \cdot 3^{3x-1} = 36$$

$$4^{x+1} - 2^{2x} = 24$$

$$5 \cdot 0,5^{x-3} + 0,5^{x+1} = 162$$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все три задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно два задания проверочной работы, либо в одном задании допущена арифметическая ошибка при решении степенного уравнения.	4
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в двух заданиях допущены арифметические ошибки при решении степенного уравнения.	3
В одном задании получен верный ответ, но допущены арифметические ошибки при решении двух степенных уравнений.	2

Проверочная работа № 4.

Цель: отработать способы решения показательных уравнений, используя приведение к квадратному уравнению.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 20 минут.

Вариант 1

$$5^{2x+1} - 5^x + 5 = 0$$

$$49 \cdot 7^{2\delta} - 50 \cdot 7^x + 1 = 0$$

Вариант 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 162 = 0$$

$$25^x - 4 \cdot 5^x + 3 = 0$$

Вариант 3

$$16^x + 3 \cdot 4^{x+1} - 64 = 0$$

$$9^x + 6 \cdot 3^{x-1} - 15 = 0$$

Вариант 4

$$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$$

$$4^{x+2} + 2 \cdot 4^x = \frac{9}{16}$$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все два задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в одном задании допущена арифметическая ошибка при решении степенного уравнения.	4
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в двух заданиях допущены арифметические ошибки при решении степенного уравнения.	3
В одном задании получен верный ответ, но допущены арифметические ошибки при решении двух степенных уравнений.	2

Проверочная работа № 5.

Цель: отработать способы решения показательных уравнений, используя деление на множитель.

Задание: решите уравнения согласно вашему варианту.

Норма времени: 30 минут.

Вариант 1

$$2^{2\delta} + 6^{\delta} - 2 \cdot 3^{2\delta} = 0$$

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$$

Вариант 2

$$3^{2x+1} - 4 \cdot 21^x - 7 \cdot 7^{2x} = 0$$

$$9^{\frac{1}{x}} = 6^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$$

Вариант 3

$$5 \cdot 3^{2x} + 7 \cdot 15^x - 6 \cdot 25^x = 0$$

$$7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$$

Вариант 4

$$4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}$$

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнено правильно все два задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в одном задании допущена арифметическая ошибка при решении степенного уравнения.	4
Выполнено правильно одно задание проверочной работы, либо в двух заданиях допущены арифметические ошибки при решении степенного уравнения.	3
В одном задании получен верный ответ, но допущены арифметические ошибки при решении двух степенных уравнений.	2

5.3 Задания из ЕГЭ

1. $7^{x-2} = 49$

2. $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-11} = \frac{1}{36}$

3. $3^{2-2x} = 81$

4. $4^{2-x} = 64$

5. $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+6} = 512$

6. $9^{x-2} = 81$

7. $7^{5-2x} = 1,96 \cdot 5^{5-2x}$

8. $2^{11-2x} = 8^{3x}$

9. $4^{x+1} - 4 \cdot 2^{x+2} + 12 = 0$

10. $3 \cdot 9^x - 13 \cdot 3^{x+1} + 90 = 0$

6. Логарифмические уравнения

6.1 Справочный материал

Определение. Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим.

Алгоритм решения логарифмических уравнений:

- $\log_a x = b$, $a > 1$, $a \neq 1$. – простейшее логарифмическое уравнение, сводится к системе
$$\begin{cases} x^b = a \\ x > 0 \end{cases}$$

- Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно системе:
$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

- при решении логарифмических уравнений обязательно учитывать область допустимых значений

Методы решения.

1. Введения новой переменной.
2. При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используется метод логарифмирования.

II. Свойства логарифмов

1. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} = x$

2. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

4. $\log_a x^n = n \log_a x$

5. $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

10. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ - формула перехода к другому основанию

6. $\log_{a^k} x^n = \frac{n}{k} \log_a x$

7. $\log_a a = 1$

8. $\log_a 1 = 0$

9. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

6.2.1 Темы проверочных работ

Проверочная работа № 1.

Цель: отработать способы решения логарифмических уравнений, используя определение логарифма

Норма времени: 30 минут.

Вариант 1

1. $\log_{0,4} x = -2$
2. $\log_3(3 - 2x) = 3$
3. $\lg(x + 4) = -2$
4. $\log_5 x^3 - 6 = 0$
5. $\ln(4x + 3) = 2$

Вариант 2

1. $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$
2. $\log_6(5x - 5) = 2$
3. $\lg(4 - x) = 2$
4. $\log_4 x^5 + 5 = 0$
5. $\ln(2x - 3) = 1$

Вариант 3

1. $\log_3 x = -4$
2. $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 5) = -2$
3. $\lg(2x + 5) = -1$
4. $\log_2 x^4 - 4 = 0$
5. $\ln(x + 5) = 2$

Вариант 4

1. $\log_2 x = -3$
2. $\log_{\frac{1}{5}}(2x - 3) = -1$
3. $\lg(3 - 2x) = 2$
4. $\log_4 x^3 + 3 = 0$
5. $\ln(4 + x) = 1$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнены правильно 5 заданий проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнены правильно 4 задания проверочной работы, получены верные ответы.	4
Выполнены правильно 3 задания проверочной работы, получен верный ответ.	3
Выполнены 3 или меньше заданий проверочной работы, получены не верные ответы, допущены арифметические ошибки.	2

Проверочная работа № 2.

Цель: отработать способы решения логарифмических уравнений, используя метод потенцирования (отбрасывание логарифмов с одинаковым основанием)

Норма времени: 30 минут.

Вариант 1

1. $\log_4(3x+2) = \log_4 7$
2. $\log_{0,5} x = \log_{0,5}(2x-7)$
3. $\log_3(4x-5) = \log_3(6+x)$
4. $\lg(8x-3) - \lg(5+x) = 0$
5. $\ln(3x+8) = \ln(5-x)$

Вариант 2

1. $\lg(2-x) = \lg 3$
2. $\log_6(5x-2) = \log_6 x$
3. $\log_{\frac{2}{5}}(3+x) = \log_{\frac{2}{5}}(2x-7)$
4. $\log_2(4x+5) - \log_2(6-x) = 0$
5. $\ln(7-x) = \ln(2x+5)$

Вариант 3

1. $\ln 5 = \ln(4x+7)$
2. $\lg x = \lg(3-2x)$
3. $\log_4(3x-2) = \log_4(5-x)$
4. $\log_{0,3}(7+x) = \log_{0,3}(4x-3)$
5. $\lg(x-3) - \lg(4+7x) = 0$

Вариант 4

1. $\log_{0,2} 7 = \log_{0,2}(x+8)$
2. $\lg(2-x) = \lg 3x$
3. $\log_{\frac{5}{3}}(4x-3) = \log_{\frac{5}{3}}(7+x)$
4. $\ln(5-x) = \ln(8x+3)$
5. $\log_6(5x+4) - \log_6(9-x) = 0$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнены правильно 5 заданий проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнены правильно 4 задания проверочной работы, получены верные ответы.	4
Выполнены правильно 3 задания проверочной работы, получен верный ответ.	3
Выполнены 3 или меньше заданий проверочной работы, получены не верные ответы, допущены арифметические ошибки.	2

Проверочная работа № 3.

Цель: отработать способы решения логарифмических уравнений, используя свойства логарифма

Норма времени: 30 минут.

Вариант 1

$$\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$$

$$\log_2(3x - 1) + \log_2(x + 1) = 5$$

$$\lg(x - 2) = 1 - \lg(x + 2)$$

Вариант 3

$$\lg(x - 2) = 1 - \lg(x + 2)$$

$$\log_2(2x - 1) + \log_2(3x - 2) = 0$$

$$\log_6(2x^2 - x) = 1 - \log_6 2$$

Вариант 2

$$\log_6(2x^2 - x) = 1 - \log_6 2$$

$$\log_8 x + \lg_8(x + 2) = 1$$

$$\lg(x + 3) = 1 - \lg(x - 3)$$

Вариант 4

$$\lg(x + 3) = 1 - \lg(x - 3)$$

$$\log_3(2x + 1) + \log_3(x - 1) = 3$$

$$\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнены правильно 3 задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнены правильно 2 задания проверочной работы, получены верные ответы.	4
Выполнено правильно 1 задание проверочной работы, получен верный ответ.	3
Выполнены меньше 1 задания проверочной работы, получены не верные ответы, допущены арифметические ошибки.	2

Проверочная работа № 4.

Цель: отработать способы решения логарифмических уравнений, используя метод приведения к квадратному

Норма времени: 30 минут.

Вариант 1

$$\log_{0,2}^2 x - 4\log_{0,2} x + 3 = 0$$

$$\log_4^2(x-4) + 2\log_4(x-4) - 3 = 0$$

$$\log_4^2 x - 3\log_4 x = 3^{\log_3 4}$$

Вариант 3

$$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$$

$$\log_5^2(x+6) - 3\log_5(x+6) + 2 = 0$$

$$\log_3^2 x - \log_3 x = 5^{\log_5 2}$$

Вариант 2

$$\log_7^2 x + 3\log_7 x - 4 = 0$$

$$\log_3^2(3-x) - 4\log_3(3-x) + 3 = 0$$

$$\log_3^2 x - \log_3 x = 4^{\log_4 6}$$

Вариант 4

$$\log_5^2 x + 7\log_5 x - 8 = 0$$

$$\log_4^2(3+x) + 2\log_4(3+x) - 3 = 0$$

$$\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x = 4^{\log_4 6}$$

Критерии оценки выполнения заданий:

Содержание ответа	Оценка
Выполнены правильно 3 задания проверочной работы, получены во всех заданиях верные ответы.	5
Выполнены правильно 2 задания проверочной работы, получены верные ответы.	4
Выполнены правильно 1 задание проверочной работы, получен верный ответ.	3
Выполнены 2 задания проверочной работы, получены не верные ответы, допущены арифметические ошибки.	2

6.3 Задания из ЕГЭ

1. $\log_2(7-x) = 5$
2. $\log_2(14-2x) = 4\log_2 3$
3. $\log_7(x^2 - 4x) = \log_7(x^2 + 3)$
4. $\log_{x-6} 32 = 5$
5. $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) = -4$
6. $\log_7(8-x) = 2$
7. $\log_2(2-15x) = 3$
8. $\log_3(2x^2 - 7x) = 2$
9. $\log_5(2x^2 + 49x) = 2$