МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний для обучающихся Самарского университета по основным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика и специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов

Составители: *Е.А. Денискина,*
О.Ю. Семёнова

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2022

УДК 511(075)
ББК 22.141я7

Составители: ***Е.А. Денискина, О.Ю. Семёнова***

Рецензент д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Д о р о ш и н

Комплексные числа: методические указания / составители: *Е.А. Денискина, О.Ю. Семёнова.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 32 с.

Методические указания содержат основные теоретические сведения, разбор типовых задач, а также задачи для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по одному из разделов высшей математики «Комплексные числа». Все задачи снабжены ответами.

Выполнены на кафедре высшей математики и предназначены для обучающихся первого курса по направлению подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика и специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов.

УДК 511(075)
ББК 22.141я7

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современной математике комплексное число является одним из фундаментальных понятий, находящим применение и в «чистой науке», и в прикладных областях. Понятно, что так было далеко не всегда.

До XVI века при решении некоторых квадратных уравнений $x^2 + px + q = 0$ математики получали выражение вида $A + \sqrt{B}$, где $B < 0$, и показывали, что в этом случае уравнение не имеет положительных и отрицательных решений, а также нулевого решения, и поэтому $\sqrt{B}$ при $B < 0$ не имеет смысла.

В XVI веке выражение вида $A + \sqrt{B}$, где $B < 0$ появлялось в случае наличия трёх действительных корней при решении кубического уравнения вида $x^3 + px + q = 0$ по формуле итальянского математика Д. Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \text{где } D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

По этой причине математики вынуждены были изучать выражение вида $A + \sqrt{B}$, где $B < 0$. Так появились мнимые числа.

Термин «мнимые числа» ввёл в 1637 году Р. Декарт, а в 1777-м великий отечественный математик Л. Эйлер (1707–1783) предложил обозначать число $\sqrt{-1}$ первой буквой французского слова imaginaire (мнимый). Символ $i = \sqrt{-1}$ стал широко использоваться математиками после употребления его в своих работах К. Гауссом (1777–1855). Гаусс заменил название «мнимые числа» на «комплéксные числа». В переводе с латинского complexus обозначает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений.

Появление комплексного числа позволило решить важные алгебраические вопросы. Один из вопросов состоял в количестве корней алгебраического уравнения n-й степени: $x^n + a_1x^{n-1} +$

$+ a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$. На множестве комплексных чисел это уравнение имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Другой вопрос состоял в представлении многочлена с действительными коэффициентами в виде произведения многочленов не выше второй степени и тоже с действительными коэффициентами. Многие считали, что это невозможно. С помощью комплексных чисел этот вопрос был решён положительно.

С помощью комплексных чисел решались не только алгебраические вопросы, но и геометрические. Например, К. Гаусс с помощью комплексных чисел нашёл, при каких натуральных значениях n можно построить циркулем и линейкой правильный n-угольник. Благодаря новым числам были доказаны некоторые классические теоремы геометрии. В терминах комплексных чисел была построена аналитическая геометрия прямых и окружностей.

Знание комплексных чисел позволяет удобно и компактно формулировать многие математические модели, применяемые в естественных науках.

Новые числа стали использовать не только в алгебре и геометрии, но и в теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории чисел, теории функций, теории поверхностей, вычислительной математике. Комплексные числа применялись в картографии французским математиком Ж.Л. Лагранжем. Эти числа нашли применение в гидродинамике, теории фильтрации почв, экономике. В конце XIX века американский электротехник И.П. Штейнмец предложил метод расчёта электрических цепей переменного тока, полностью основанный на комплексных числах.

На основе комплексных чисел развивалась теория функций комплексного переменного, основы которой заложил французский математик О.Л. Коши. Для развития комплексного анализа большое значение имели работы русских математиков Н.И. Лобачевского, Ю.В. Сохоцкого, немецких математиков Б. Римана, К. Вейерштрасса, Ф. Клейна, П. Кебе, французского математика А. Пуанкаре, советских математиков М.А. Лаврентьева, В.С. Владимирова.

В XX веке комплексные числа и комплексные функции применялись в аэродинамике русскими и советскими математиками и механиками Н.Е. Жуковским, С.А. Чаплыгиным, М.В. Келдышем. Комплексные функции впервые использовали советские математики Г.В. Колосов и Н.И. Мусхелишвили в теории упругости. Советскими учёными Н.Н. Боголюбовым и В.С. Владимировым комплексные переменные использовались в теоретической физике.

Комплексные числа используются, например, в описании процессов плоского течения жидкости, обтекании профилей газами и жидкостями. Так, комплексные числа использовал великий русский учёный Н.Е. Жуковский (1847–1921) при создании теории крыла летательных аппаратов.

С помощью комплексных чисел можно рассчитывать параметры для сетей постоянного и переменного тока. В электротехнике комплексными числами описывают реактивное сопротивление катушек и конденсаторов.

Комплексные числа лежат в основе математического аппарата квантовой физики. Ключевое уравнение квантовой механики – уравнение Шрёдингера – содержит мнимую единицу; решение этого уравнения также содержит число i. Однако конечные формулы для расчёта наблюдаемых физических характеристик уже не содержат комплексных чисел (мнимая единица «поработала» в расчётах как необходимый вспомогательный аппарат и «удалилась»).

Большое значение комплексные числа имели при изучении движения естественных и искусственных небесных тел. Важные задачи из этой области были решены на основе применения комплексных чисел советскими учёными Е.П. Аксёновым, Е.А. Гребениковым, В.Г. Дёминым.

Всё сказанное о комплексных числах говорит о необходимости изучения этих чисел в курсе математики, что повысит математическую культуру студентов, позволит им освоить последующие темы курса, а также быть готовыми к изучению специальных дисциплин.

1. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Теоретический материал

Определение:

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + i\,y$, где x и y – действительные числа, а i – мнимая единица, причем $i^2 = -1$.

Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Определение:

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = Re\,z$ (от французского слова *réel* – действительный), а y – мнимой частью числа z и обозначается $y = Im\,z$ (от французского слова *imaginaire* – мнимый).

Определение:

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ называются равными, если равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Для комплексных чисел не введено сравнение, т.е. нельзя определить? какое комплексное число больше, а какое меньше.

Определение:

Два комплексных числа $z = x + i\,y$ и $\overline{z} = x - i\,y$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются сопряженными.

Комплексное число $z = x + i\,y$ равно нулю тогда и только тогда, когда его действительная и мнимая части равны нулю.

Использование комплексных чисел позволяет находить решение задач, которых невозможно было решить в действительных числах.

Примеры решения задач

Решить уравнения.

$\mathbf{1.1}$ $z^2 + 6z + 10 = 0.$

Имеем дело с квадратным уравнением с $D = -4 < 0$. В подобных случаях ранее мы всегда делали вывод о том, что квадратное уравнение не имеет действительных корней, но это не означало, что корней нет вообще (просто на тот момент мы не могли их найти).

$$\sqrt{D} = \sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = \left[i^2 = -1 \Rightarrow \sqrt{-1} = i\right].$$

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i.$$

$\mathbf{1.2}$ $z^4 + 3z^2 - 4 = 0.$

Это биквадратное уравнение, которое решается с помощью замены $z^2 = t$.

$$t^2 + 3t - 4 = 0.$$

$$D = 25 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -4.$$

$$z_{1,2} = \pm 1, z_{3,4} = \pm 2i.$$

$\mathbf{1.3}$ $z^4 - 16 = 0.$

Применим формулу разности квадратов.

$$(z^2 - 4)(z^2 + 4) = 0 \Rightarrow z^2 - 4 = 0 \text{ или } z^2 + 4 = 0.$$

$$z_{1,2} = \pm 2,\ z_{3,4} = \pm 2i.$$

$\mathbf{1.4}$ $z^3 - 1 = 0.$

Применим формулу разности кубов.

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow z - 1 = 0 \text{ или } z^2 + z + 1 = 0.$$

$$z_1 = 1,\ z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Задачи

Решить следующие уравнения.

1.5 $z^2 + 2z + 2 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = -1 \pm i$.

1.6 $2z^2 + 6z + 9 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}i$.

1.7 $z^2 - 4z + 13 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = 2 \pm 3i$.

1.8 $2z^2 + 2z + 5 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$.

1.9 $5z^2 - 2z + 13 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \frac{8}{5}i$.

1.10 $z^2 + 6z + 25 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = -3 \pm 4i$.

1.11 $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$. Ответ: $z_1 = 2 + i$,

$z_2 = 1 - 3i$.

1.12 $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$. Ответ: $z_1 = 1 - 2i$,

$z_2 = 3i$.

1.13 $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + 2 - 2i = 0$. Ответ: $z_1 = 1 - i$,

$z_2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

1.14 $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$. Ответ: $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 2i$.

1.15 $z^4 - z^2 - 20 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = \pm\sqrt{5}, z_{3,4} = \pm 2i$.

1.16 $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = \pm i, z_{3,4} = \pm 3i$.

1.17 $2z^4 + 15z^2 - 27 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, z_{3,4} = \pm 3i$.

1.18 $3z^4 + 80z^2 + 125 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}i, z_{3,4} = \pm 5i$.

1.19 $z^4 - 1 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = \pm 1, z_{3,4} = \pm i$.

1. 20 . $z^4 - 81 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = \pm 3, z_{3,4} = \pm 3i$.

1. 21 $z^4 - 256 = 0$. Ответ: $z_{1,2} = \pm 4, z_{3,4} = \pm 4i$.

1. 22 $z^3 - 1 = 0$. Ответ: $z_1 = 1, z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

1. 23 $z^3 + 8 = 0$. Ответ: $z_1 = -2, z_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3} i$.

1. 24 $27z^3 - 1 = 0$. Ответ: $z_1 = \frac{1}{3}, z_{2,3} = -\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} i$.

2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Теоретический материал

Над комплексными числами можно совершать те же самые действия, что и с действительными числами – сложение, вычитание, умножение и деление. Действия с комплексными числами не представляют особых сложностей и мало чем отличаются от обычной алгебры.

Сложение и вычитание комплексных чисел происходит по принципу отдельного сложения действительных частей чисел и мнимых частей (приведение подобных слагаемых).

Умножение комплексных чисел происходит как умножение множителей в скобках, с поэтапным прорабатыванием действительных и мнимых частей комплексного числа. При умножении комплексных чисел i^2 всегда трансформируется в -1.

При делении комплексных чисел результат также является комплексным числом, для получения которого и числитель, и знаменатель дроби нужно умножить на комплексное число, сопряженное знаменателю. В этом случае используется формула сокращенного умножения, и мнимая часть в знаменателе исчезает. Упрощенная дробь будет результатом деления комплексных чисел друг на друга.

Примеры решения задач

Выполнить действия над комплексными числами.

2.1 $(1-2i)-(4+5i)=\begin{bmatrix}\text{приводим подобные}\\ \text{слагаемые}\end{bmatrix}=(1-4)+$
$+(-2i-5i)=-3-7i.$

2.2 $(1+2i)\cdot(2-3i)=\begin{bmatrix}\text{раскрываем}\\ \text{скобки}\end{bmatrix}=2-3i+4i-$
$-6\,i^2=[i^2=-1]=2-3i+4i+6=8+i.$

2.3 $(2-3i^{21})^3=[i^{21}=(i^2)^{10}\cdot i=(-1)^{10}\cdot i=i]=$
$=(2-3i)^3=8-36i+54i^2-27i^3=$
$=8-36i-54+27i=-46-9i.$

2.4 $\dfrac{1+2i}{2-3i}=\begin{bmatrix}\text{домножаем и делим дробь на}\\ \text{сопряженное к знаменателю КЧ}\end{bmatrix}=$
$=\dfrac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{2+3i+4i+6i^2}{4-9i^2}=$
$=\dfrac{2+3i+4i-6}{4+9}=\dfrac{-4+7i}{13}=-\dfrac{4}{13}+\dfrac{7}{13}i.$

Задачи

Выполнить действия.

2.5 $(3+5i)+(4-6i)$. Ответ: $7-i$.

2.6 $(3+5i)(4-6i)$. Ответ: $42+2i$.

2.7 $(2+3i)(3-i)$. Ответ: $9+7i$.

2.8 $(5+i)(15-3i)+(3+4i)(6-5i)$. Ответ: $116+9i$.

2.9 $(5+3i)(-2+3i)+(2-i)(-3-4i)$. Ответ: $-29+4i$.

2.10 $(\sqrt{2}+i)(\sqrt{6}-\sqrt{3}i)$. Ответ: $3\sqrt{3}$.

2.11 $(2i-i^2)^2+(1-3i)^3$. Ответ: $-29+22i$.

2.12 $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3$. Ответ: -8.

2.13 $(2+i)^4$. Ответ: $-7+24i$.

2.14 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$. Ответ: i.

2.15 $\frac{2}{1+3i}$. Ответ: $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$.

2.16 $\frac{5-2i}{1-i}$. Ответ: $\frac{7}{2}+\frac{3}{2}i$.

2.17 $\frac{1}{1+4i}+\frac{1}{4-i}$. Ответ: $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i$.

2.18 $i^3+i^8-3i^{27}+\frac{1}{i}+2i^{101}$. Ответ: $1+3i$.

2.19 $i^{25}+2i^{30}-3i^7+i^{80}$. Ответ: $-1+4i$.

2.20 $\frac{(8+i)^2}{(2-3i)^2}$. Ответ: $-3+4i$.

2.21 $\left(\frac{i^5+2}{1+i^{19}}\right)^2$. Ответ: $-2+\frac{3}{2}i$.

3. ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Теоретический материал

Комплексное число $z=x+i\,y$ можно изобразить на плоскости Oxy точкой $M(x,y)$ (рис. 1).

Определение: Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной.

Точкам, лежащим на оси Ox, соответствуют действительные числа. Точкам, лежащим на оси Oy, соответствуют чисто мнимые числа. Поэтому при изображении комплексных чисел ось абсцисс называют действительной осью, а ось ординат – мнимой.

Соединив точку $M(x,y)$ с началом координат, получим вектор $\overline{OM}$, который называется радиусом-вектором точки M. В некоторых случаях удобно считать геометрическим представлением комплексного числа вектор $\overline{OM}$ (рис. 2).

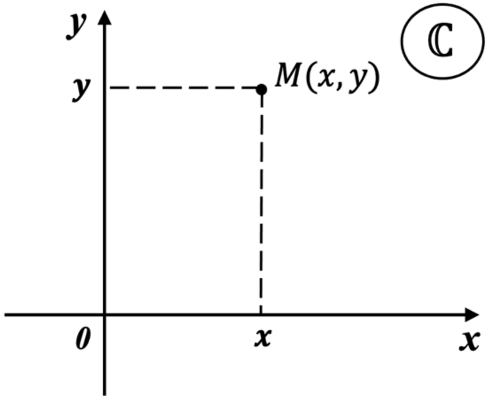

Рисунок 1 – Графическое представление комплексного числа

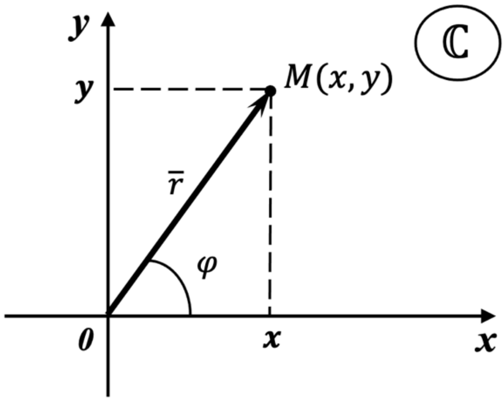

Рисунок 2 – Графическое представление модуля и аргумента комплексного числа

Определение: Модулем комплексного числа z называется длина вектора $\overline{OM}$ и обозначается $|z|$ или r.

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Определение: Аргументом комплексного числа z называется угол между положительным направлением действительной оси и вектором $\overline{OM}$.

Аргумент комплексного числа – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Обозначается: φ или $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z$ – главное значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$ или $[0; 2\pi)$:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k.$$

Для нахождения аргумента используют геометрическое представление комплексного числа и формулу

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Геометрическое представление, в зависимости от четверти, позволяет выбрать главное значение аргумента.

Определение: Запись комплексного числа z в виде $z = x + i\,y$ называют алгебраической формой записи комплексного числа.

Определение: Запись комплексного числа z в виде $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называют тригонометрической формой записи комплексного числа.

Определение: Запись комплексного числа z в виде $z = |z|\, e^{i\,\varphi}$ называют показательной формой записи комплексного числа.

Определение: Формула, связывающая показательную и тригонометрическую формы записи комплексного числа, называется формулой Эйлера:

$$e^{i\,\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Примеры решения задач

3.1 Определить модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 + + i\sqrt{3}$.

$$x = Re\, z = 1, \qquad y = Im\, z = \sqrt{3}$$
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Изобразим заданное комплексное число на комплексной плоскости, ему соответствует точка $(1;\ \sqrt{3})$ (рис. 3).

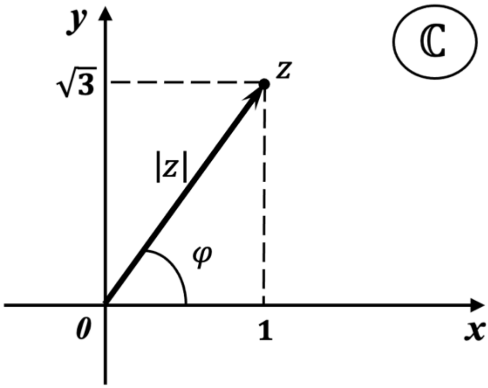

Рисунок 3 – Иллюстрация к задаче 3.1

Исключительно из рисунка определить аргумент не представляется возможным. Воспользуемся формулой с тангенсом:

$$tg\, \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1}.$$

Точка, соответствующая комплексному числу, попадает в первую четверть, поэтому $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

3.2 Представить комплексное число $z = -2$ в тригонометрической и показательной формах.

Для записи тригонометрической и показательной форм необходимо знание модуля и главного значения аргумента комплексного числа.

$$x = \operatorname{Re} z = -2, \qquad y = \operatorname{Im} z = 0,$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 0} = 2.$$

Изобразим заданное комплексное число на комплексной плоскости, ему соответствует точка $(-2;\ 0)$ (рис. 4).

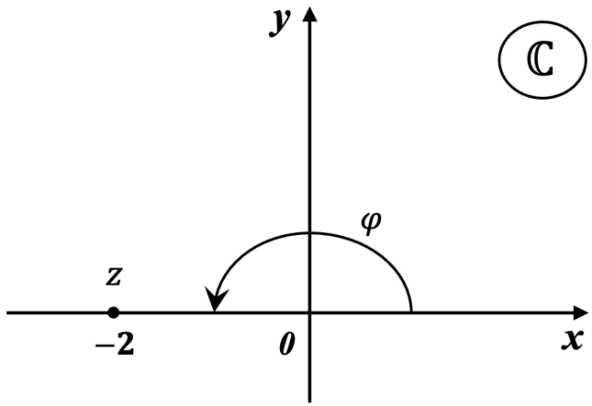

Рисунок 4 – Иллюстрация к задаче 3.2

Для определения главного значения аргумента достаточно рисунка. Видим, что $\varphi = \pi$.

Зная модуль и аргумент, можем записать тригонометрическую и показательную формы комплексного числа:

$$z = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Вычислять значения тригонометрических функций не нужно – получим исходную алгебраическую форму

$$z = 2\, e^{i\,\pi}.$$

Задачи

3.3 Построить на комплексной плоскости следующие точки:

$$\boldsymbol{a})\ z=2-3i;\ \ \boldsymbol{b})z=-1;\ \ \boldsymbol{c})\ z=\frac{i}{3};\ \ \boldsymbol{d})\ z=-\sqrt{2}\,i.$$

Представить следующие комплексные числа в тригонометрической и показательной формах.

3.4 $z=-2.$ Ответ: $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi}.$

3.5 $z=3.$ Ответ: $z=3(\cos 0-i\sin 0)=3e^{0i}.$

3.6 $z=2i.$ Ответ: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\frac{\pi}{2}i}.$

3.7 $z=-i.$ Ответ: $z=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=e^{-\frac{\pi}{2}i}.$

3.8 $z=3\sqrt{3}+3\,i.$ Ответ: $z=6\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=6e^{\frac{\pi}{6}i}.$

3.9 $z=-2+2\sqrt{3}\,i.$ Ответ: $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=4e^{\frac{2\pi}{3}i}.$

3.10 $z=1-\ i.$ Ответ: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$

3.11 $z=-2-\ 2i.$ Ответ: $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=$

$$=2\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Представить следующие комплексные числа в алгебраической форме.

3.12 $z=e^{2+\frac{\pi}{4}i}.$ Ответ: $z=\frac{\sqrt{2}e^2}{2}+i\frac{\sqrt{2}e^2}{2}.$

3.13 $z=e^{-i}.$ Ответ: $z=\cos 1-i\sin 1.$

Изобразить следующие комплексные числа на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме.

3.14 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$ Ответ: $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}.$

3.15 $z=\frac{1-i}{1+i}.$ Ответ: $z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}.$

4. ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Теоретический материал

Возводить в натуральную степень n комплексные числа проще всего в тригонометрической форме, то есть если дана алгебраическая форма комплексного числа $z = x + iy$, то его изначально надо записать в тригонометрической.

Пусть комплексное число представлено в тригонометрической форме $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда для возведения его в натуральную степень n применима формула:

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Таким образом, при возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Данная формула называется формулой Муавра.

Определение: Корнем n-й степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w, n-я степень которого равна z, т.е. $w^n = z$.

Корень n-й степени из комплексного числа z обозначается символом $\sqrt[n]{z}$ и на множестве комплексных чисел имеет ровно n различных значений.

Прежде чем извлекать корень из комплексного числа, его придется представить в тригонометрической форме $z = |z|(\cos\varphi + {}$ ${}+ i\sin\varphi)$. Тогда все значения корня n-й степени можно вычислить посредством следствия из формулы Муавра:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Данная формула позволяет вычислить корень z_k, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Придавая k значения от 0 до $n-1$, получим n различных корней.

Геометрически все значения корня лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и образуют правильный n-угольник.

Примеры решения задач

4.1 Вычислить $\left(-\sqrt{3}+3i\right)^7$.

Представим заданное комплексное число в тригонометрической форме, для этого определим модуль и аргумент.

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}.$$

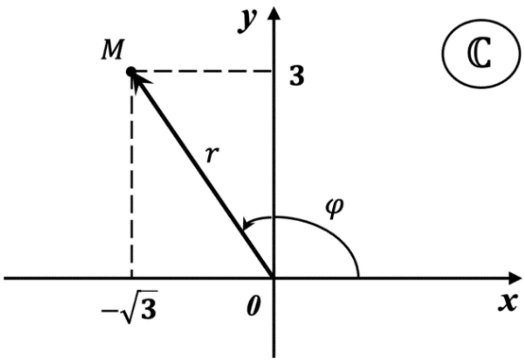

Рисунок 5 – Иллюстрация к задаче 4.1

$$tg\,\varphi = -\frac{3}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ (рис. 5).}$$

Тогда заданное комплексное число можно записать в тригонометрической форме:

$$-\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Выполним возведение в степень по формуле Муавра:

$$\left(-\sqrt{3}+3i\right)^7=\left(2\sqrt{3}\right)^7\left(\cos\frac{14\,\pi}{3}+i\sin\frac{14\,\pi}{3}\right)=$$

$$=3456\,\sqrt{3}\left(\cos\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=3456\,\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=3456\,\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=-1728\sqrt{3}+5184i\,.$$

4.2 Вычислить $\sqrt{-1}$.

Для извлечения корня из заданного комплексного числа представим его в тригонометрической форме. Для этого найдем модуль и аргумент комплексного числа.

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1.$$

Числу в координатной плоскости соответствует точка $M(-1,0)$ (рис. 6):

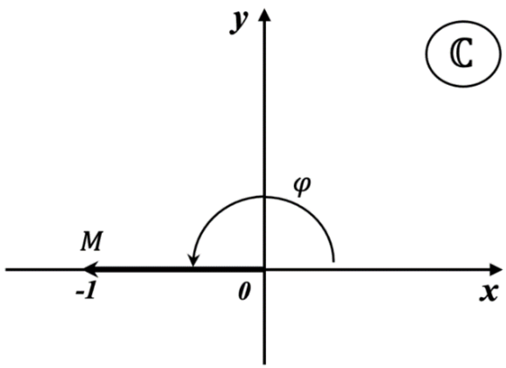

Рисунок 6 – Иллюстрация к задаче 4.2

Из рисунка видно, что $\varphi=\pi$. Тогда тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид:

$$-1=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi).$$

В результате извлечения корня второй степени мы должны получить два различных значения. Применим следствие из формулы Муавра:

$$k=0:\ \ z_0=\sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{2}\right)=$$
$$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$
$$k=1:\ \ z_1=\sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{2}\right)=$$
$$=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

Найденные значения корня в комплексной плоскости представляют собой точки: $M_1(0,1)$, $M_2(0,-1)$ (рис. 7), лежащие на окружности радиуса 1 и делящие окружность на две равные части (многоугольник в данном случае вырождается в отрезок).

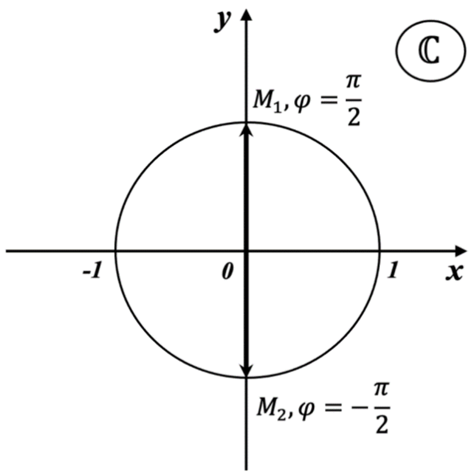

Рисунок 7 – Иллюстрация к задаче 4.2

Задачи

Используя формулу Муавра, возвести комплексное число в степень. Результат представить в алгебраической форме.

$\mathbf{4.3}$ $z=(2-2i)^{10}$. Ответ: $z=-\left(2\sqrt{2}\right)^{10} i=-32768\, i$.

$\mathbf{4.4}$ $z=\left(\sqrt{3}-3i\right)^{6}$. Ответ: $z=1728$.

$\mathbf{4.5}$ $z=\left(1+\sqrt{3}\, i\right)^{40}$. Ответ: $z=-2^{39}(1+\sqrt{3}\, i)$.

$\mathbf{4.6}$ $z=(1+i)^{10}$. Ответ: $z=32\, i$.

$\mathbf{4.7}$ $z=\left(\dfrac{1-\ i}{1+i}\right)^{8}$. Ответ: $z=1$.

$\mathbf{4.8}$ $z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\, i}{1-i}\right)^{20}$. Ответ: $z=512(1-\sqrt{3}\, i)$.

$\mathbf{4.9}$ $z=\dfrac{(1-i)^{7}\left(-\sqrt{3}-i\right)^{12}}{(1+i)^{15}}$. Ответ: $z=256\, i$.

$\mathbf{4.10}$ Найти все значения корня $\sqrt{i}$. Изобразить их на комплексной плоскости.

Ответ: $z_{1,2}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

$\mathbf{4.11}$ Найти все значения корня $\sqrt[3]{i}$. Изобразить их на комплексной плоскости.

Ответ: $z_1=-i, z_{2,3}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

$\mathbf{4.12}$ Найти все значения корня $\sqrt[4]{-1}$. Изобразить их на комплексной плоскости.

Ответ: $z_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i), z_{3,4}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

$\mathbf{4.13}$ Найти все значения корня $\sqrt{-1+\sqrt{3}\, i}$. Изобразить их на комплексной плоскости.

Ответ: $z_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)$.

4.13 Найти все значения корня $\sqrt{2-2\sqrt{3}\,i}$. Изобразить их на комплексной плоскости.

Ответ: $z_{1,2} = \pm(\sqrt{3} - i)$.

5. ИЗОБРАЖЕНИЕ КРИВЫХ И ОБЛАСТЕЙ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Теоретический материал

Для построения кривых и областей на комплексной плоскости, как правило, достаточно представить в заданном уравнении комплексную переменную в алгебраической форме $z = x + iy$ и применить имеющиеся знания из курсов школьной математики и линейной алгебры.

Примеры решения задач

5.1 Начертить на комплексной плоскости линии, точки которых удовлетворяют уравнению $|z - 2 + 3i| = 3$.

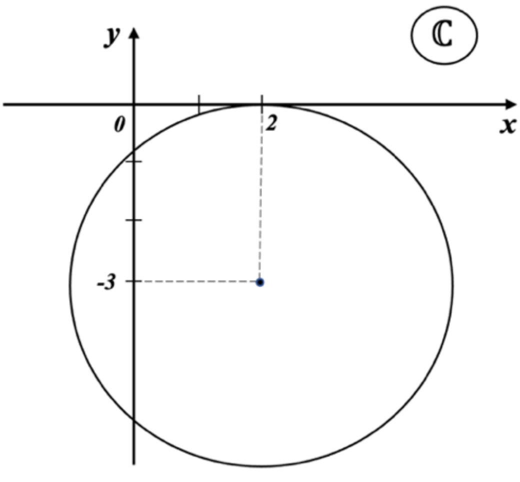

Рисунок 8 – Иллюстрация к задаче 5.1

Если $z = x + iy$, то $|z - 2 + 3i| = |x + iy - 2 + 3i| =$ $= |(x-2) + i(y+3)| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$.

Таким образом, получаем уравнение $\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = 3$ или $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Это уравнение окружности с центром в точке $(2; -3)$ радиуса 3 (рис. 8).

5. 2 Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенствами $|z+1| < 2, 0 \le \arg z < \frac{\pi}{4}$.

Построим сначала границы области.

Уравнение $|z+1| = 2$ определяет на комплексной плоскости окружность с центром в точке $z_0 = -1$ радиуса 2. Так как в условии $|z+1| < 2$, то искомая область – внутренность круга без включения границы, так как неравенство строгое.

Двойному неравенству $0 \le \arg z < \frac{\pi}{4}$ соответствует область, представляющая собой сектор между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$, расположенный в первой четверти, включая границу $\varphi = 0$ и не включая границу $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

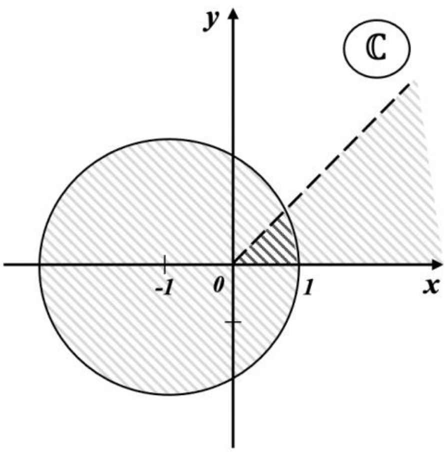

Рисунок 9 – Иллюстрация к задаче 5.2

Задачи

Начертить на комплексной плоскости линии, точки которых удовлетворяют следующим уравнениям.

5.3 $|z| = 4$.

Ответ: Окружность с центром в начале координат радиуса 4.

5.4 $\operatorname{Re} z = 5$.

Ответ: Вертикальная прямая с уравнением $x = 5$.

5.5 $|z + 3 - i| = 2$.

Ответ: Окружность с центром в точке $z_0 = -3 + i$ радиуса 2.

5.6 $\operatorname{Im}(z - 3i) = \operatorname{Re} 2z$.

Ответ: Прямая с уравнением $y = 2x + 3$.

5.7 $\operatorname{Re} z^2 = 4$.

Ответ: Гипербола с центром в начале координат и полуосями, равными 2.

5.8 $\operatorname{Im} z^2 = 2$.

Ответ: Гипербола, заданная уравнением $y = \frac{1}{x}$.

5.9 $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: Луч прямой $y = x$ в первой четверти.

5.10 $|z + 4| + |z - 4| = 10$.

Ответ: Эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

5.11 $(3 + 2i)z - (3 - 2i)\overline{z} + 10i = 0$.

Ответ: Прямая, заданная уравнением $2x + 3y + 5 = 0$.

5.12 $z \cdot \overline{z} + i(z - \overline{z}) - 2 = 0$.

Ответ: Окружность с центром в точке $z_0 = i$ радиуса $\sqrt{3}$.

Начертить на комплексной плоскости области, заданные следующими неравенствами.

5.13 $|z - 1| > 3$.

Ответ: Внешность круга с центром в точке $z_0 = 1$ радиуса 3, не включая границу.

5.14 $|z| \leq 2$.

Ответ: Внутренность круга с центром в начале координат радиуса 2, включая границу.

5.15 $2 < |z - 1 + 2i| < 4$.

Ответ: Кольцо между окружностями с центром в точке $z_0 = 1 - 2i$ радиусов 2 и 4, не включая границы.

5.16 $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 3$.

Ответ: Вертикальная полоса между прямыми $x = -1$ и $x = 3$, включая границы.

5.17 $0 < \operatorname{Im} z \leq 1$.

Ответ: Горизонтальная полоса между прямыми $y = 0$ и $y = 1$, включая верхнюю границу.

5.18 $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{6}$.

Ответ: Сектор между лучами $y = -x$ и $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, расположенный в первой и четвертой четвертях, не включая границы.

5.19 $|z - 1| \leq 1,\ \ |z + 1| > 2$.

Ответ: Область, полученная пересечением внутренности круга с центром в точке $z_0 = 1$ радиуса 1 и внешности круга с центром в точке $z_0 = -1$ радиуса 2. Граница, относящаяся к кругу радиуса 1, включена; граница, относящаяся к кругу радиуса 2, не включена.

5.20 $|z + i| \leq 1,\ \ -\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: Область, полученная пересечением внутренности круга с центром в точке $z_0 = -i$ радиуса 1 и сектора между лучами $y = x$ и $y = -x$, расположенного в третьей и четвертой четвертях. Граница, относящаяся к кругу, включена; границы, относящиеся к сектору, не включены.

5.21 $|z - 2 + i| \geq 1,\ \ 1 \leq \operatorname{Re} z < 3, -3 < \operatorname{Im} z \leq 0$.

Ответ: Внутренность прямоугольника, ограниченного прямыми $y = -3,\ y = 0, x = 1,\ x = 3$, из которого вырезали круг с центром в точке $z_0 = 2 - i$ радиуса. Граница круга и границы, имеющие уравнения $y = 0, x = 1$, включены.

5.22 $1 < |z - 1 - 2i| < 3,\;\; 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{3}$.

Ответ: Часть кольца между окружностями с центром в точке $z_0 = 1 + 2i$ радиусов 1 и 3, не включая границы, ограниченная лучами $y = 0$ и $y = \sqrt{3}x$, расположенными в первой четверти, не включая границу $y = 0$.

ВАРИАНТЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Вариант 1

1. Вычислить $\dfrac{2 + 3i^3}{i^4 + i}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i$.

2. Решить уравнение $2z^2 + 2z + 1 = 0$ на множестве комплексных чисел.

Ответ: $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$.

3. Представить комплексное число $z = 2\sqrt{3} - 2i$ в тригонометрической и показательной формах.

Ответ: $z = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\,e^{-\frac{\pi i}{6}}$.

4. Вычислить $(-2 + 2i)^8$.

Ответ: 4096.

5. Найти все значения корня из комплексного числа $\sqrt{4 + 4\sqrt{3}\,i}$.

Ответ: $\pm\left(\sqrt{6} + i\,\sqrt{2}\right)$.

6. Построить на комплексной плоскости область, заданную неравенствами: $1 \leq |z + 2 - 3i| < 3,\;\; 0 < \mathrm{Re}\,(z + 3) \leq 3$.

Вариант 2

1. Вычислить $\dfrac{3i^5-2}{2i^4-i}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{5}+\dfrac{8}{5}i$.

2. Решить уравнение $z^3+8=0$ на множестве комплексных чисел.

Ответ: $-2;\ 1\pm\sqrt{3}\,i$.

3. Представить комплексное число $z=-3-3\sqrt{3}\,i$ в тригонометрической и показательной формах.

Ответ: $z=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}-i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=6\,e^{-\frac{2\pi i}{3}}$.

4. Вычислить $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^7$.

Ответ: $-8192\sqrt{3}-8192i$.

5. Найти все значения корня из комплексного числа $\sqrt[3]{-27\,i}$.

Ответ: $\pm\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)$.

6. Построить на комплексной плоскости область, заданную неравенствами: $|z+i|>2, |z-2|<3, \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Краснов, М.Л.* Вся высшая математика: учебник. Т. 4 / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. – Москва: Эдиториал УРСС, 2005. – 352 с.

2. *Мышкис, А.Д.* Математика для технических вузов. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – Санкт-Петербург: Лань, 2002. – 640 с.

3. *Письменный, Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. – Москва: Айрис-пресс, 2004. – 608 с.

4. Сборник задач по математике для вузов: Специальные разделы математического анализа / под редакцией *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича*. – Москва: Наука, 1981. – 366 с.

Методические материалы

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Методические указания

Составители:
Денискина Екатерина Александровна,
Семёнова Ольга Юрьевна

Компьютерное редактирование А.С. Никитиной
Компьютерная верстка А.С. Никитиной

Подписано в печать 20.09.2022. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 2,0.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. 2(Р2МУ)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.