Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Вятский государственный гуманитарный университет»

Дополнительная подготовка школьников по дисциплине «Информатика и информационные технологии»

Учебный модуль
Системы счисления

Е. В. Котельников

Киров
2011

СОДЕРЖАНИЕ

1. Позиционные и непозиционные системы счисления

1.1. Основные понятия

Система счисления – правило записи чисел с помощью заданного набора специальных символов – *цифр*.

Совокупность цифр, используемых в системе счисления, называется *алфавитом* системы счисления.

Существуют два основных вида систем счисления – непозиционные и позиционные.

В *непозиционных* системах счисления вес цифры (т. е. тот вклад, который она вносит в значение числа) не зависит от ее позиции в записи числа.

В *позиционных* системах счисления вес каждой цифры изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающей число.

Базис позиционной системы счисления – это возрастающая последовательность чисел, отвечающих за веса цифр.

Если базис образуют члены геометрической прогрессии вида

$$\ldots, P^{-2}, P^{-1}, 1, P, P^2, P^3, \ldots$$

то такую систему счисления называют *традиционной*.

Основанием традиционной системы счисления называется знаменатель P геометрической прогрессии, члены которой образуют базис системы счисления. Основание соответствует количеству цифр, используемых в системе счисления.

К традиционным относится, например, десятичная система счисления, основание которой равно 10, а базис составляют числа:

$$\ldots \quad 0{,}01 \quad 0{,}1 \quad 1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \quad \ldots$$

Традиционную систему счисления с основанием P называют *P-ичной системой счисления*.

Некоторые нетрадиционные системы счисления будут рассмотрены в конце этого модуля.

Если из контекста неясно, в какой системе счисления записано число, указывают основание системы счисления нижним индексом: 125_{10}.

1.2. Непозиционные системы счисления

Примерами непозиционных систем счисления являются унарная и римская системы счисления.

В *унарной* системе счисления используется единственная цифра – 1, а число обозначается соответствующим количеством единиц.

Пример. Число 3 в унарной системе счисления обозначается 111, а число 7 – 1111111.

Таким образом, когда при подсчете чего-либо мы используем палочки, или зарубки, или какую-либо другую единственную отметку, оказывается, мы применяем унарную систему счисления.

В *римской* системе счисления цифр намного больше и все они являются буквами латинского алфавита:

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

Число составляется по следующим правилам.

1. Если меньшая цифра стоит слева от большей, то меньшая цифра вычитается из большей. Обычно используют 6 примеров применения этого правила: IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900.

2. Если меньшая цифра стоит справа от большей, то обе цифры складываются. Одинаковые цифры так же складываются.

Пример. VIII = 8, XXIX = 29, LV = 55, XLV = 45, CCC = 300, MCM = 1900, MMXI = 2011.

Как видно из примеров, вес любой цифры, как в унарной, так и в римской системах счисления не зависит от её позиции в числе, в отличие от веса цифр в позиционных системах счисления.

Римская система счисления до сих пор достаточно часто используется на практике, в основном в тех случаях, когда не требуется представлять большие числа и выполнять с ними сложные арифметические операции, например, при обозначении веков, времени на циферблатах часов, номеров глав в книгах и т. д.

Непозиционными системами счисления также являются биномиальная система счисления, система остаточных классов, древнеегипетская система счисления и некоторые другие.

1.3. Позиционные системы счисления

Общеизвестным примером позиционной системы счисления является *десятичная* система счисления с основанием 10, использующая арабские цифры. Вес цифры в десятичной записи числа связан с местоположением цифры. Позиция цифры в числе называется *разрядом*.

Пример. В десятичной системе счисления в числе 55,5 первая пятерка означает 50, вторая – 5, а третья – 0,5.

Пример. Разряды нумеруются, начиная с запятой, отделяющей целую часть числа от дробной. Цифры целой части нумеруются положителными числами, дробной части – отрицательными. Запишем десятичное число 789, 45 с номерами разрядов:

$$\overset{2}{7}\;\overset{1}{8}\;\overset{0}{9}\;,\;\overset{-1}{4}\;\overset{-2}{5}$$

Существуют две формы записи чисел:

1) *свернутая* (обычная форма записи):

$$a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, ,\, a_0\, a_{-1} \ldots\, a_{-m},$$

где a_i – цифры числа.

Пример: $789{,}45_{10}$.

2) *Развернутая*, которая получается с использованием основания системы счисления и номеров разрядов:

$$A = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P^1 + a_0 + a_{-1} P^{-1} + \ldots + a_{-m} P^{-m}\,. \tag{1}$$

Пример: $789{,}45_{10} = 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$.

За основание позиционной системы счисления можно принять любое целое число, большее единицы – 2, 3, 4 и т. д. В информатике, кроме десятичной системы счисления, широко используются двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления. Выбор двоичной системы счисления связан с удобством аппаратной реализации двоичного кодирования информации в компьютере, а восьмеричная и шестнадцатеричная применяются для краткой записи двоичных чисел.

В *двоичной* системе счисления используются всего 2 цифры – 0 и 1, в *восьмеричной* 8 цифр – от 0 до 7. В *шестнадцатеричной* системе счисления должно быть 16 цифр, но поскольку арабских цифр всего 10 (от 0 до 9), то после девятки используются латинские буквы:

A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.

2. Единственность представления чисел в P-ичных системах счисления

Теорема. Пусть P – произвольное натуральное число, большее единицы. Существует и единственно представление любого натурального числа A в виде:

$$A = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0, \tag{2}$$

где $0 \le a_i < P$, $0 \le i \le n$, $a_n \ne 0$.

Доказательство.

Существование. Построим для произвольного натурального числа A представление (2).

Поскольку числа P^0, P^1, P^2, … образуют монотонно возрастающую числовую последовательность, то существует такое натуральное число n, что

$$P^n \le A < P^{n+1}.$$

Разделим интервал $\left[P^n; P^{n+1}\right)$ на P–1 равных частей. Получим интервалы $\left[P^n; 2 \cdot P^n\right)$, $\left[2 \cdot P^n; 3 \cdot P^n\right)$, …, $\left[(P-1) \cdot P^n; P \cdot P^n\right)$. Длина каждого интервала равна P^n.

Из (2) следует, что число A попадет в один из указанных интервалов, т. е. существует такое $k \in [1; P)$, что

$$kP^n \le A < (k+1)P^n. \tag{3}$$

Положим $a_n = k$. При этом $a_n \ne 0$.

Обозначим разность между числом A и левой границей интервала (3) как $B = A - a_n P^n$. Найдем коэффициент a_{n-1} для числа B.

Если $B = 0$, то построение завершено.

Если $B < P$, то полагаем $a_{n-1} = B$ и построение также завершается.

Иначе для нахождения a_{n-1} действуем по приведенному выше алгоритму, а затем находим коэффициент a_{n-2} для числа $B - a_{n-1} P^{n-1}$ и т. д.

Процесс всегда закончится, поскольку на каждом шаге рассматривается число, меньшее чем на предыдущем шаге.

В итоге получим разложение (2).

Единственность. Используем доказательство от противного.

Предположим, что число A имеет два различных разложения вида (2):

$$A_1 = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0, \tag{4}$$

$$A_2 = b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \ldots + b_1 P + b_0. \tag{5}$$

Докажем сначала, что $m = n$. Предположим, что $m > n$ (или $m \geq n + 1$). Покажем, что в этом случае $A_2 > A_1$. Найдем минимальное число для разложения (5), учитывая, что $a_n \neq 0$. Для минимального числа коэффициенты будут равны:

$$b_m = 1,\ b_{m-1} = b_{m-2} = \ldots = b_1 = b_0 = 0,$$

тогда

$$A_2 \geq 1 \cdot P^m + 0 \cdot P^{m-1} + \ldots + 0 \cdot P^1 + 0 = P^m,$$

$$A_2 \geq P^m.$$

Найдем максимальное число для разложения (4). Коэффициенты будут равны:

$$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = P - 1.$$

$$A_1 \leq (P-1) \cdot P^n + (P-1) \cdot P^{n-1} + \ldots + (P-1) \cdot P^1 + (P-1).$$

По формуле суммы членов геометрической прогрессии получаем:

$$A_1 \leq P^{n+1} - 1$$

или

$$A_1 < P^{n+1}.$$

Поскольку предполагали, что $m \geq n + 1$, то

$$A_1 < P^{n+1} \leq A_2.$$

Таким образом, $A_1 < A_2$. Следовательно, если $A_1 = A_2$, то $n = m$ и разложение (5) имеет вид:

$$A_2 = b_m P^n + b_{m-1} P^{n-1} + \ldots + b_1 P + b_0 . \qquad (6)$$

Докажем, что $a_n = b_n$. Снова используем доказательство от противного. Пусть $a_n > b_n$ (например, $a_n = b_n + 1$). Рассмотрим разность:

$$A_1 - A_2 = P^n - (a_{n-1} - b_{n-1})P^{n-1} - \ldots - (a_1 - b_1)P - (a_0 - b_0).$$

Найдем минимальное число – нижнюю границу разности. Для этого положим все $a_i = P - 1$, все $b_i = 0$, $i \in [0; n)$:

$$A_1 - A_2 \geq P^n - \left[(P-1)P^{n-1} + (P-1)P^{n-2} + \ldots + (P-1)P - (P-1)\right] = 1 .$$

Следовательно, $A_1 \neq A_2$, поэтому $a_n = b_n$.

Далее докажем, что $a_i = b_i$, $i \in [0; n)$. Предположим, что существует некоторое k, при котором $a_k \neq b_k$, но $a_i = b_i$ при $i \in (k; n]$. Рассмотрим числа:

$$B_1 = A_1 - a_n P^n - a_{n-1} P^{n-1} - \ldots - a_{k+1} P^{k+1} = a_k P^k + a_{k-1} P^{k-1} + \ldots + a_1 P + a_0 ,$$
$$B_2 = A_2 - b_n P^n - b_{n-1} P^{n-1} - \ldots - b_{k+1} P^{k+1} = b_k P^k + b_{k-1} P^{k-1} + \ldots + b_1 P + b_0 .$$

Найдя разность $B_1 - B_2$ и повторяя предыдущие рассуждения, получим, что при $a_k \neq b_k$ разность $B_1 - B_2 > 0$, следовательно, $B_1 \neq B_2$ и $A_1 \neq A_2$.

Таким образом, получили противоречие с утверждением о том, что число A имеет разные представления (4) и (5). Следовательно, $a_i = b_i$ при $i \in [0; n]$, $m = n$, т. е. представление (2) для любого числа единственно, что и требовалось доказать.

3. Арифметические операции в Р-ичных системах счисления

3.1. Сложение

При выполнении операции сложения в позиционных системах счисления используют таблицы сложения. Приведем таблицы сложения для нескольких систем счисления.

Таблица 1. Сложение в двоичной системе счисления

	0	1
0	0	1
1	1	10

Таблица 2. Сложение в десятичной системе счисления

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Таблица 3. Сложение в шестнадцатеричной системе счисления

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Из приведенных таблиц видно, что если сумма двух цифр является двузначным числом, то первая цифра суммы всегда будет равна 1.

Примеры.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 1\;1\;1\;0_2 \\ 1\;0\;1\;1_2 \end{array} \\ \hline 1\;1\;0\;0\;1_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} + \begin{array}{r} 6\;7\;1\;3_{10} \\ 5\;8\;9\;4_{10} \end{array} \\ \hline 1\;2\;6\;0\;7_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} + \begin{array}{r} E\;7\;F\;A_{16} \\ C\;D\;5\;6_{16} \end{array} \\ \hline 1\;B\;5\;5\;0_{16} \end{array}$$

3.2. Вычитание

При вычитании из большего числа меньшего также используются таблицы сложения. Только в этом случае результатом будет не число на пересечении строки и столбца, как при сложении, а цифра в начале строки. Предположим, нужно вычесть из цифры A цифру B и $A \geq B$. Тогда нужно в столбце для цифры B найти строку с цифрой A и ответом будет цифра в начале этой строки:

	…	…	*B*	…
			↓	
			↓	
Ответ	⟵	⟵	*A*	

Если $A < B$, тогда нужно занимать единицу из старшего (ближайшего левого) разряда и вычитание A – B заменяется на вычитание 1A – B, поскольку:

$$10 + A - B = 1A - B$$

Следовательно, в столбце для цифры B нужно искать строку с числом *1A* и ответом по-прежнему будет цифра в начале этой строки:

	…	…	*B*	…
			↓	
			↓	
Ответ	⟵	⟵	*1A*	

Примеры.

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1_2 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1_2 \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\begin{array}{cccc} 6 & 7 & 1 & 3_{10} \\ 5 & 8 & 9 & 4_{10} \end{array} \\
\hline
\begin{array}{cccc} 0 & 8 & 1 & 9_{10} \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-\begin{array}{cccc} E & 7 & F & A_{16} \\ C & D & 5 & 6_{16} \end{array} \\
\hline
\begin{array}{cccc} 1 & A & A & 4_{16} \end{array}
\end{array}
$$

3.3. Умножение

Для выполнения операции умножения используются таблицы сложения и умножения.

Таблица 4. Умножение в двоичной системе счисления

	0	1
0	0	0
1	0	1

Таблица 5. Умножение в шестнадцатеричной системе счисления

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Алгоритм умножения знаком всем с детства и состоит в последовательном умножении первого множителя на цифры второго, начиная с младшей, и сложения полученных сумм.

Примеры.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & \times & 1 & 1 & 1 & 0_2 \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
+ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & \times & 6 & 7 & 1 & 3_{10} \\
 & & & & & 9 & 4_{10} \\
\hline
 & & 2 & 6 & 8 & 5 & 2 \\
+ & 6 & 0 & 4 & 1 & 7 & \\
\hline
 & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2_{10}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & \times & E & 7 & F & A_{16} \\
 & & & & & 5 & 6_{16} \\
\hline
 & & 4 & 6 & F & D & C \\
+ & 4 & 8 & 7 & E & 2 & \\
\hline
 & 4 & D & E & D & F & C_{16}
\end{array}
$$

3.4. Деление

Деление выполняется столбиком и сводится к последовательности операций вычитания и умножения, т. е. требуются таблицы сложения и умножения.

Примеры.

$$
\begin{array}{ccccccccc|cccc}
- & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0_2 & 1 & 1 & 1 & 0_2 \\
\cline{10-13}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\cline{2-6}
 & - & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & & \\
\cline{3-8}
 & & & - & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\
\cline{5-9}
 & & & & & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc|ccccc}
- & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2_{10} & 9 & 4_{10} & & & \\
\cline{8-12}
 & 5 & 6 & 4 & & & & 6 & 7 & 1 & 3_{10} & \\
\cline{2-4}
 & - & 6 & 7 & 0 & & & & & & & \\
 & & 6 & 5 & 8 & & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & - & 1 & 2 & 2 & & & & & & \\
 & & & & 9 & 4 & & & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & - & 2 & 8 & 2 & & & & & \\
 & & & & 2 & 8 & 2 & & & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
- & 4 & D & E & D & F & C_{16} & 5\;6_{16} \\
  & 4 & B & 4 &   &   &   & \overline{E\;7\;F\;A_{16}} \\
\hline
  & - & 2 & A & D &   &   & \\
  &   & 2 & 5 & A &   &   & \\
\hline
  &   & - & 5 & 3 & F &   & \\
  &   &   & 5 & 0 & A &   & \\
\hline
  &   &   & - & 3 & 5 & C   & \\
  &   &   &   & 3 & 5 & C   & \\
\hline
  &   &   &   &   &   & 0   &
\end{array}
$$

Для всех арифметических операций в системах счисления, отличных от десятичной, можно предложить ещё один подход: перевести все числа в десятичную систему счисления, выполнить операции и перевести числа обратно в исходную систему счисления.

4. Переводы чисел

4.1. Перевод из Р-ичной системы счисления в десятичную

Для перевода числа из Р-ичной системы счисления в десятичную нужно записать число в развернутой форме (1), при этом все цифры a_i, основание P и показатели степеней следует представить в десятичной системе счисления.

Пример. Число $1101010{,}101_2$ перевести в десятичную систему счисления.

Сначала пронумеруем все разряды двоичного числа:

$$\overset{6}{1}\ \overset{5}{1}\ \overset{4}{0}\ \overset{3}{1}\ \overset{2}{0}\ \overset{1}{1}\ \overset{0}{0}\ ,\ \overset{-1}{1}\ \overset{-2}{0}\ \overset{-3}{1}$$

Затем воспользуемся формулой (1) для получения десятичного представления:

$$1101010{,}101_2 = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^3 =$$
$$= 64 + 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0 + 0{,}5 + 0 + 0{,}125 = 106{,}625_{10}.$$

Пример. Число $A9F{,}5_{16}$ перевести в десятичную систему счисления.

Сначала пронумеруем все разряды шестнадцатеричного числа:

$$\overset{2}{A}\ \overset{1}{9}\ \overset{0}{F}\ ,\ \overset{-1}{5}$$

Применяем формулу (1), не забывая представить все шестнадцатеричные цифры в десятичном эквиваленте:

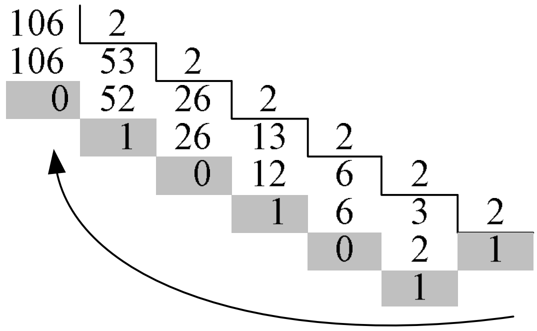
$$A9F{,}5_{16} = 10\cdot 16^2 + 9\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 + 5\cdot 16^{-1} = 10\cdot 256 + 9\cdot 16 + 15\cdot 1 + 5\cdot 0{,}0625 =$$
$$= 2560 + 144 + 15 + 0{,}3125 = 2719{,}3125_{10}$$

4.2. Перевод из десятичной системы счисления в Р-ичную

Перевод целой и дробной частей десятичного числа в P-ичную систему счисления следует проводить раздельно, объединив затем результаты.

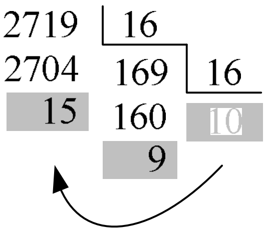
Для перевода *целой части числа* из десятичной системы в P-ичную нужно делить число на основание P требуемой системы счисления до тех пор, пока частное не станет меньше P, а затем записать последнее частное и все остатки от деления в обратном порядке.

Пример. Перевести число 106_{10} в двоичную систему счисления.



Ответ: $106_{10} = 1101010_2$.

Пример. Перевести число 2719_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.



Ответ: $2719_{10} = A9F_{16}$.

Для перевода дробной части десятичного числа нужно умножать число на основание P системы счисления до тех пор, пока произведение не станет равно нулю, или пока не достигнута требуемая разрядность. Дело в том, что десятичная конечная дробь может иметь бесконечное представление в P-ичной системе счисления, поэтому и вводится ограничение на число разрядов. После каждого умножения целая часть отбрасывается, а следующее умножение осуществляется с остатком. По завершении умножения искомое число в P-ичной системе счисления формируется путем выписывания целых частей произведений в порядке их получения.

Пример. Перевести число $0{,}625_{10}$ в двоичную систему счисления.

$$
\begin{array}{rr}
 & 0{,}625 \\
\times & 2 \\
\hline
1, & 25 \\
\times & 2 \\
\hline
0, & 5 \\
\times & 2 \\
\hline
1, & 0
\end{array}
$$

Ответ: $0{,}625_{10} = 0{,}101_2$.

Пример. Перевести число $0{,}3125_{10}$ в шестнадцатеричную систему счисления.

$$
\begin{array}{rr}
 & 0{,}3125 \\
\times & 16 \\
\hline
5, & 0
\end{array}
$$

Ответ: $0{,}3125_{10} = 0{,}5_{16}$.

4.3. Перевод чисел между двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системами счисления

Перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную и обратно осуществляется достаточно просто, требуется только знать таблицы перевода.

Таблица 6. Перевод чисел между двоичной и восьмеричной системами счисления

Двоичная	Восьмеричная
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Таблица 7. Перевод чисел между двоичной и шестнадцатеричной системами счисления

Двоичная	Шестнадцатеричная
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Особенность перевода чисел в этих системах счисления заключается в том, что всегда одна восьмеричная цифра соответствует трем двоичным ($2^3 = 8$), а одна шестнадцатеричная цифра соответствует четырем двоичным ($2^4 = 16$). Поэтому алгоритмы перевода из двоичной системы счисления сводятся к разбиению двоичного числа, начиная справа, на триады (по три цифры) в случае восьмеричной системы счисления или тетрады (по четыре цифры) в случае шестнадцатеричной и переводе триад или тетрад отдельно в соответствии с приведенными выше таблицами 6 и 7.

Пример. Перевести число 111100110101011_2 в восьмеричную систему счисления.

Разобьем двоичное число на триады, начиная с младшего разряда:

$$111\ 100\ 110\ 101\ 011_2.$$

Переводим триады отдельно по таблице 6:

$$111_2 = 7_8,\ 100_2 = 4_8,\ 110_2 = 6_8,\ 101_2 = 5_8,\ 011_2 = 3_8.$$

Формируем восьмеричное число: 74653_8.

Пример. Перевести число 111100110101011_2 в шестнадцатеричную систему счисления.

Решаем аналогично, только разбиваем двоичное число на тетрады. Крайняя левая тетрада будет неполной (количество цифр в двоичном числе не кратно 4), поэтому дописываем незначащие нули справа:

$$111100110101011_2 = 0111\ 1001\ 1010\ 1011_2.$$

Переводим по тетрадам, пользуясь таблицей 7:

$$0111_2 = 7_{16},\ 1001_2 = 9_{16},\ 1010_2 = A_{16},\ 1011_2 = B_{16}.$$

Записываем ответ: $111100110101011_2 = 79AB_{16}$.

Перевод чисел из восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления происходит поразрядно: каждая цифра в представлении восьмеричного и шестнадцатеричного числа заменяется на триаду или тетраду в соответствии с таблицей 6 или 7.

Пример. Перевести число 74653_8 в двоичную систему счисления.

Воспользуемся таблицей 6 – находим для каждой восьмеричной цифры заданного числа двоичный эквивалент:

$$7_8 = 111_2,\ 4_8 = 100_2,\ 6_8 = 110_2,\ 5_8 = 101_2,\ 3_8 = 011_2,$$

и записываем полученные двоичные числа подряд:

$$74653_8 = 111\ 100\ 110\ 101\ 011_2.$$

Пример. Перевести число $79AB_{16}$ в двоичную систему счисления.

По таблице 7 находим двоичные числа, соответствующие шестнадцатеричным в заданном числе:

$$7_{16} = 0111_2,\ 9_{16} = 1001_2,\ A_{16} = 1010_2,\ B_{16} = 1011_2,$$

и записываем двоичные числа подряд:

$$79AB_{16} = 0111\ 1001\ 1010\ 1011_2.$$

5. Нетрадиционные системы счисления

В P-ичных системах счисления, рассмотренных ранее, базисом являлась геометрическая прогрессия вида:

$$\ldots, P^{-2}, P^{-1}, 1, P, P^2, P^3, \ldots$$

и такие позиционные системы счисления назывались традиционными.

Существуют также *нетрадиционные* системы счисления, базис которых не является геометрической прогрессией. Примером может служить *факториальная* система счисления. Её базис образует последовательность факториалов:

$$1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots$$

Алфавит факториальной системы зависит от числа используемых разрядов: если используется n разрядов, то количество цифр равно $n+1$ (включая ноль).

Ещё одной нетрадиционной системой счисления является *фибоначчиева* система счисления. Базис этой системы составляют числа Фибоначчи:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

В алфавите фибоначчиевой системы счисления, как и в алфавите двоичной, всего две цифры – 0 и 1.

6. Задания для самостоятельной работы

1. Приведите определения понятий: *система счисления*, *алфавит системы счисления*, *базис*, *основание*, *позиционные* и *непозиционные системы счисления*, *P-ичная система счисления*.

2. Переведите числа из римской системы счисления в десятичную:
XVIII, XXIX, XLVI, LIII, LXXVIII, XCIV, CXXII, CCC, DCLVI, MMCXXV.

3. Запишите числа в развернутой форме:
$573{,}67_{10}$; $1273{,}12_{10}$; $111011{,}1001_2$; $10011011{,}01_2$; $ABC{,}5E_{16}$; $FA83{,}AA_{16}$.

4. Запишите результат сложения для примеров:
$110110111_2 + 10010110_2$; $10110101_2 + 1101011_2$; $34DF_{16} + 7AF_{16}$; $8AB_{16} + 79_{16}$.

5. Запишите результат вычитания для примеров:
$11001000_2 - 1011011_2$; $10001000_2 - 1011011_2$; $12DC_{16} - 9FF_{16}$; $8A7C_{16} - 7D81_{16}$.

6. Запишите результат умножения для примеров:
$10110111_2 \cdot 1011_2$; $11010110_2 \cdot 1001_2$; $7FDA_{16} \cdot 87_{16}$; $1E84_{16} \cdot FD_{16}$.

7. Запишите результат деления для примеров:
$11001100_2 / 1001_2$; $11101110_2 / 111_2$; $DEAF_{16} / 8C_{16}$.

8. Перевести числа из двоичной системы счисления в десятичную и шестнадцатеричную:
$10110111{,}1011_2$; $110011001100{,}1101_2$; $1010001111111001{,}111_2$.

9. Перевести числа из десятичной системы счисления в двоичную и шестнадцатеричную:
$128{,}675_{10}$; $280{,}54_{10}$; $500{,}5_{10}$; 1250_{10}.

10. Перевести числа из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную и десятичную:
$ED{,}AF_{16}$; $101{,}B4_{16}$; $ABC{,}67_{16}$; $FDE7_{16}$.

11. Написать на Паскале программу перевода чисел в двоичную, десятичную и шестнадцатеричную системы счисления.

Литература

1. Андреева Е. В., Босова Л. Л., Фалина И. Н. Математические основы информатики. Элективный курс: Учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
2. Гашков С. Б. Системы счисления и их применение. – М.: МЦНМО, 2004.
3. Фомин С. В. Системы счисления. – 5-е изд. – М.: Наука, 1987.