Лекция. Простейшие тригонометрические неравенства.

Неравенство, в котором неизвестная переменная находится под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим неравенством*

К *простейшим тригонометрическим неравенствам* относятся следующие 16 неравенств:

$\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$,

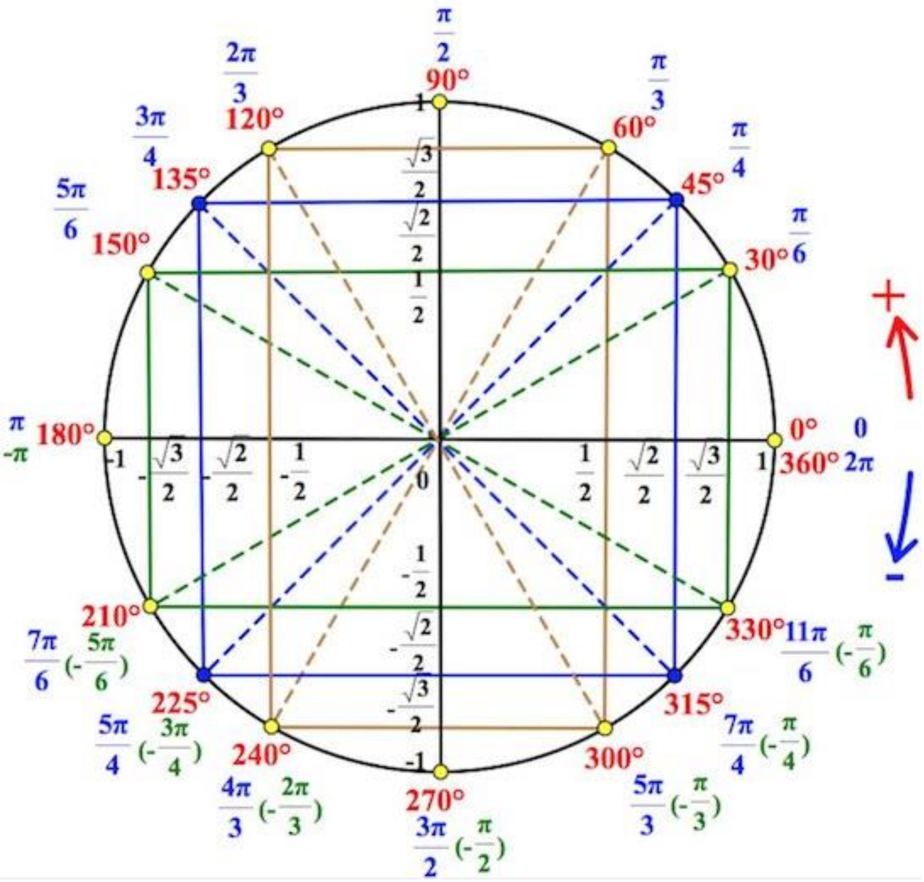
$\cos x > a$, $\cos x \geq a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$,

$\text{tg } x > a$, $\text{tg } x \geq a$, $\text{tg } x < a$, $\text{tg } x \leq a$,

$\text{ctg } x > a$, $\text{ctg } x \geq a$, $\text{ctg } x < a$, $\text{ctg } x \leq a$.

Здесь x является неизвестной переменной, a может быть любым действительным числом.

Вспомним тригонометрическую окружность, сегодня нам это очень пригодится.

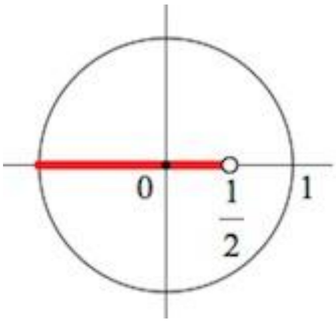


1. Решить неравенство: $\cos x \ < \frac{1}{2}$

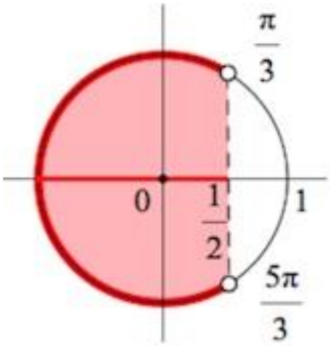
Решение:

Отмечаем на оси косинусов $\frac{1}{2}$

Все значения $\cos x$, меньшие $\frac{1}{2}$ – **левее** точки $\frac{1}{2}$ на оси косинусов.



Отмечаем все точки (дугу, точнее – серию дуг) тригонометрической окружности косинус которых будет меньше $\frac{1}{2}$



Полученную дугу мы **проходим против часовой стрелки (!)**, то есть от точки $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{3}$.

Обратите внимание, многие, назвав первую точку $\frac{\pi}{3}$ вместо второй точки $\frac{5\pi}{3}$ указывают точку $-\frac{\pi}{3}$, что неверно!

Становится видно, что неравенству удовлетворяют следующие значения

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

*Следите за тем, чтобы «правая/вторая точка» была бы больше «левой/первой»***.** *Не забываем* $+2\pi n, n \in Z$

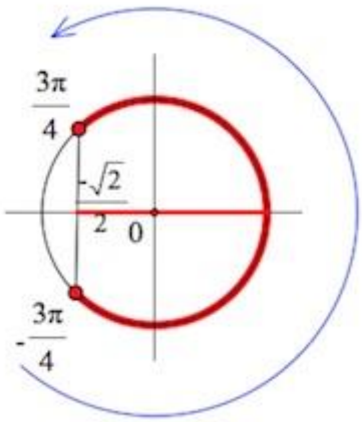
2. Решить неравенство: $\cos x \ \geq \ -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение:

Отмечаем на оси косинусов $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Все значения $\cos x$, большие или равные $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ – **правее** точки $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, включая саму точку.

Тогда выделенные красной дугой аргументы отвечают тому условию, что $\cos x \ \geq \ -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



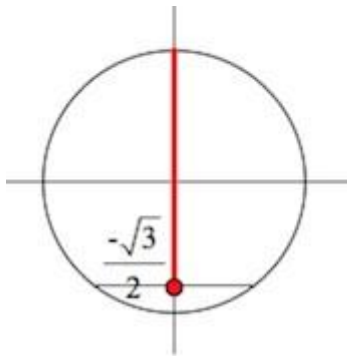
$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

3. Решить неравенство: $\sin x \ \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

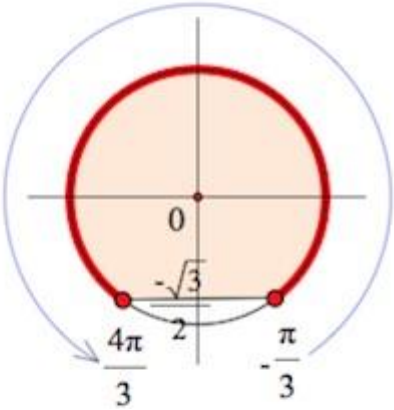
Решение:

Отмечаем на оси синусов $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Все значения $\sin x$, большие или равные $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ – **выше** точки $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, включая саму точку.



Рассмотрим выделенные точки на тригонометрической окружности:



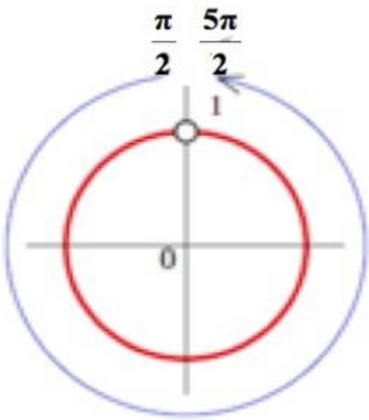
Идем по окружности от $-\frac{\pi}{3}$ к $\frac{4\pi}{3}$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

4. Решить неравенство: $\sin x < 1$

Решение:

Кратко:



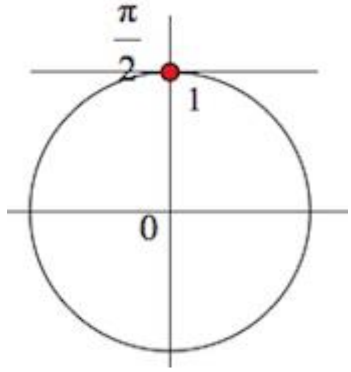
$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

или все x , кроме $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

5. Решить неравенство: $\sin x \geq 1$

Решение:

Неравенство $\sin x \geq 1$ равносильно уравнению $\sin x = 1$, так как область значений функции $y = \sin x$ находится в промежутке $[-1; 1]$

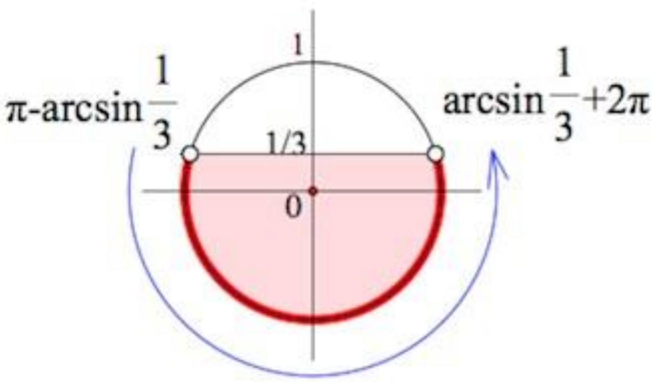


$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

6. Решить неравенство: $\sin x < \frac{1}{3}$

Решение:

Единственное отличие данного неравенства, то что мы имеем дело не с табличным значением синуса.

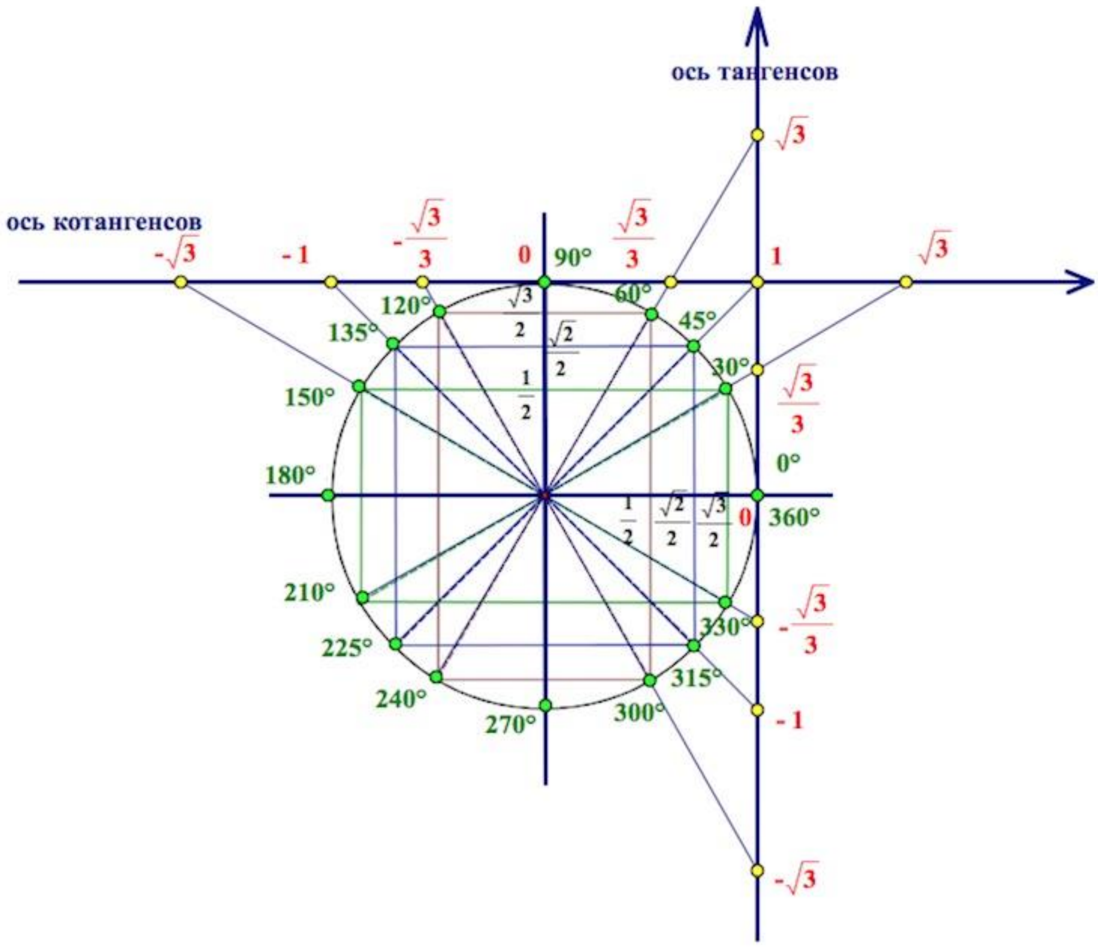


Зная определение арксинуса, запишем:

$$\pi - arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n < x < arcsin\frac{1}{3} + 2\pi + 2\pi n, n \in Z$$

Мы с движемся против часовой стрелки, поэтому необходимо, чтобы левый конец промежутка был меньше правого. Как это записать – надо добавить к $arcsin\frac{1}{3}$ еще 2π, тогда правый конец промежутка будет больше. Вы в этом убедитесь, если возьмете n=0, просто посчитайте.

При решении простейших тригонометрических неравенств, содержащих функции тангенса и котангенса, необходимо помнить об области определения этих функций.



Область определения функции тангенс $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,

Область определения функции котангенс $(0;\pi)$.

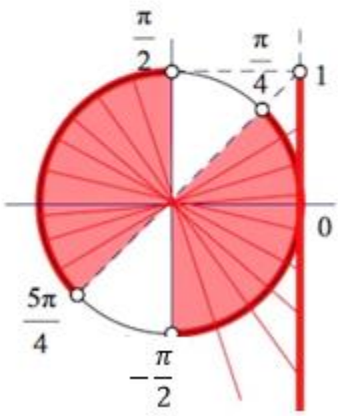
7. Решить неравенство: $tg\,x<1$

Решение:

Решим тригонометрическое уравнение $tg\,x=1$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$$

Отмечаем все точки тригонометрической окружности, значение тангенса в которых будет меньше 1. Для этого мы ~~мысленно~~ соединяем каждую точку оси тангенсов ниже 1 с началом координат; тогда каждая проведенная прямая пересечет дважды тригонометрическую окружность Вот эти-то точки нас и интересуют! Они выстраиваются в две дуги (точнее в **две серии дуг**). Значения тангенса в них – меньше 1.

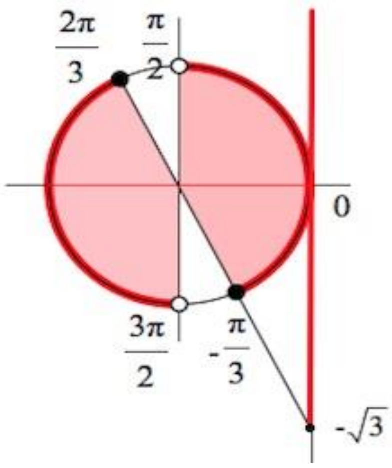


При решении неравенства нет необходимости рисовать тригонометрическую окружность. В данной лекции показано наглядно, что мы исключаем те точки, где функция тангенса не определена.
Все подходящие значения можно записать в виде следующего двойного неравенства:
$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$ или так $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in Z$

8. Решить неравенство: $tg\, x \geq -\sqrt{3}$

Решение:

Решим тригонометрическое уравнение $tg\, x = -\sqrt{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$



Все подходящие значения x можно записать в виде следующего двойного неравенства:

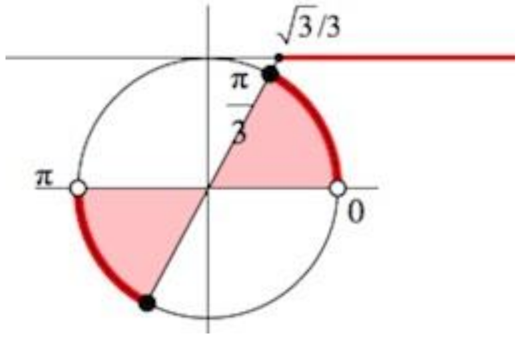
$$-\frac{\pi}{3}+\pi n \le x < \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$$

9. Решить неравенство: $ctg \le \frac{\sqrt{3}}{3}$

Решение:

Решим тригонометрическое уравнение $ctg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$



Все подходящие значения x можно записать в виде следующего двойного неравенства:

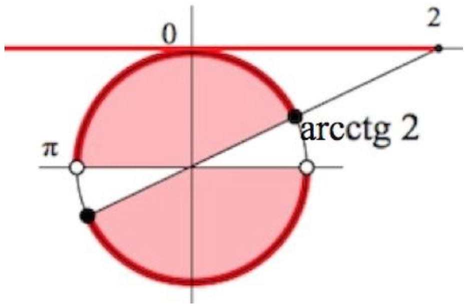
$$\pi n < x \le \frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$$

10. Решить неравенство: $ctg \le 2$

Решение:

Решим тригонометрическое уравнение $ctg\, x = 2$

$x = arcctg 2+\pi n, n \in Z$



$$arcctg 2+\pi n \le x < \pi+\pi n, n \in Z$$

Предлагаю посмотреть видеоурок по решению тригонометрических неравенств и попробовать решить самостоятельно.

Задачи для самостоятельного решения:

$\sin x \geq \frac{1}{2}$; $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

Обращаю внимание, пользуйтесь учебником. Глава 6. Основы тригонометрии» стр.93 – 120.

Занятие 5 «Тригонометрические уравнения» стр.114 – 119.

см. учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. https://www.resolventa.ru/
3. https://egemaximum.ru/